文章编号: 1001-4918 (2014) 01-0001-08　中图分类号: B844. 1　文献标识码: A

3 ~ 6 年级儿童整数数量表征与分数数量表征的关系*

张　丽[1]　卢彩芳[1]　杨新荣[2]

(1. 西南大学心理学部,重庆　400715; 2. 西南大学数学与统计学院,重庆　400715)

摘　要: 研究主要探讨了整数数量表征和分数数量表征的关系以及年级对两者关系的影响。实验对 155 名三至六年级儿童进行 0 ~ 1 分数数字线估计任务和 0 ~ 1000 整数数字线估计任务的测量。结果发现: (1) 对于整数数字线估计,所有年级儿童均主要采取了线性表征; (2) 对于分数数字线估计,五六年级儿童主要采取了线性表征,三四年级儿童没有明显的线性表征或对数表征的倾向; (3) 整数数量表征和分数数量表征呈显著正相关,不过年级对两者的关系产生了影响,表现在只有五六年级儿童的整数数字线估计对分数数字线估计有显著预测作用。

关键词: 数字线估计; 数量表征; 对数模型; 线性模型

1　前言

研究发现,儿童在理解分数上存在困难 (Bright, Behr, Post, & Wachsmuth, 1988; Hecht, Vagi, & Torgensen, 2007; Mack, 1995; Ni & Zhou, 2005)。研究者认为儿童在分数认知方面的困难与其整数知识密切相关 (Ni & Zhou, 2005)。受到整数知识的干扰,儿童将适用于整数的规则和策略错误地应用到了分数的理解和问题解决中。例如,儿童只是表征了作为整数的分子或者分母的值,而不是分数的整体值。因此估计 12/13 + 7/8 的答案时,几乎一半的学生选择了错误答案 19 或 21,表明他们把注意力都集中在了分子 (12 + 7 = 19) 或者分母 (13 + 8 = 21) 上 (Carpenter, Corbitt, Kepner, Lindquist, & Reys, 1981)。Smith, Solomon 和 Carey (2005) 研究四到六年级儿童在比较 1/75 与 1/56 任务时的表现,结果有 46% 的学生认为 1/75 比 1/56 大,说明他们直接对分母进行了加工。Pearn 和 Stephens (2004) 要求儿童在数字线上对 1/2、1/3、1/4、1/5 进行排列,结果儿童根据分母从小到大的顺序排列。此外,当要求儿童在数字线上估计分数时,儿童表现出仅表征分子或分母的倾向 (Opfer & DeVries, 2008; Thompson & Opfer, 2008)。

以上研究表明儿童表现出了分数学习的困难,他们在应用分数知识时,常常使用先前形成的有关整数的独立单元计数图式来解释分数,这种现象被称为整数偏向 (Whole Number Bias) (Ni & Zhou, 2005)。该概念的提出,明确强调了整数知识对分数知识的影响 (Ni & Zhou, 2005)。"整数偏向"的原因不同研究者有不同观点。先天约束假设 (The Innate Constraint Hypothesis) 认为,人类对数量的表征是领域特殊性的,表征数时存在一个先天的非言语计数机制,只表征正整数,而不提供对分数数量的表征,这阻碍了儿童对分数的正确表征 (Gallistel & Gelman, 1992)。未分化量假设 (The Undifferentiated Amount Hypothesis) 认为儿童早期既有离散量表征亦有连续量表征,只是以分数为代表的连续量表征的发展比较晚,因而出现整数偏向 (Mix, Huttenlocher, & Levine, 2002)。学习的负迁移说则认为整数偏向与儿童先学习整数知识有关 (Posner, Strike, Hewson, & Gertzog, 1982; Stafylidou & Vosniadou, 2004)。最近, Siegler 等 (2011, 2013) 提出了数量发展整合理论 (Integrated Theory of Numerical Development),认为前述三种观点均过于强调分数和整数的差异,主张整数知识对分数知识的干扰和消极作用。因此与上述观点不同,该理论既强调分数和整数知识掌握的差异,又强调分数和整数发展的联系。认为所有实数的一个共同特征是,能够在数字线上排序且有特定的位置,即所有实数通过数字线联系起来。

根据数量发展整合理论,分数表征能预测高级的数学认知能力,这已得到验证 (Siegler,

* 基金项目: 国家自然科学基金 (30900408); 西南大学基本科研业务费专项资金 (XDJK2011B013).

通讯作者: 杨新荣, E-mail: yangxinrong178@yahoo.com.cn

Thompson，& Schneider，2011）。然而，个体的整数数量表征与分数数量表征的关系如何，值得进一步探讨（Siegler，Thompson，& Schneider，2011；Siegler，Fazio，Bailey，& Zhou，2013）。该问题的探讨具有重要意义，若整数数量表征对分数数量表征有积极影响，则说明整数偏向现象只是儿童分数概念发展过程中的一个过渡阶段，长远来看整数发展还是能够预测分数的发展，这将能够为 Siegler 等（2011，2013）提出的数量发展整合模型提供支持。

然而，目前只有两个研究对整数数量表征与分数数量表征的关系进行了探讨（Fazio，Thompson，& Siegler，2013；Thompson & Opfer，2008）。Thompson 和 Opfer（2008）以一～三年级儿童为研究对象，采用数字线估计任务发现儿童整数大小估计的准确性和分数大小估计的准确性之间呈负相关。Fazio 等（2013）以五年级儿童为研究对象发现整数大小估计的准确性和分数大小估计的准确性存在显著的正相关。可以看出，两个研究的结果存在很大不一致。这可能有两方面原因。其一，实验材料不同。Thompson 和 Opfer（2008）实验中刺激材料为一条线段，线段的左端标有 1 美元/1 分钟，线段右端标有 1 美元/1440 分钟，要求被试把要估计的薪水值（例如：1 美元/60 分钟）标在线段的适当位置上。这些薪水值均是分子为 1 的分数。而 Fazio 等（2013）研究中则是异分子异分母分数。以往研究表明，当分数的分子或分母相同时整数对分数的干扰作用更明显。例如，研究发现被试比较 1/2，1/3 等分子为 1 的分数与 1/5 的大小时只加工分母（Bonato，Fabbri，Umiltà，& Zorzi，2007；张丽，辛自强，王琦，李红，2012）。分数估计任务中若分子恒定，成人和儿童都倾向于主要考虑分母（Opfer & Devries，2008；Thompson & Opfer，2008）。然而，当采用 0～1 的异分子异分母分数进行数字线估计时儿童主要对分数整体的实数值进行表征（Siegler，Thompson，& Schneider，2011；Iuculano & Butterworth，2011）。其二，研究对象不同。Thompson 和 Opfer（2008）的研究对象年级较低，而 Fazio 等（2013）的研究对象年级较高。这启发我们分数数量表征和整数数量表征的关系可能受到被试年级的影响。

基于以往研究结果的不一致，本研究拟对整数数量表征与分数数量表征的关系继续进行探讨。与 Fazio 等（2013）的研究相同，本研究采用了更具代表性的异分子异分母分数。任务要求儿童估计异分子异分母分数在数字线上的位置。数字线估计任务即给被试呈现一条数字线，线段的两端各自有一个数字，表示这条线段所代表的数字范围，让被试在线段上标出第三个数字所在的位置。该任务已被广泛用在评估整数数量表征能力的研究中（Booth & Siegler，2006；Laski & Siegler，2007；Opfer & Siegler，2007；Siegler & Booth，2004；Siegler & Opfer，2003；Thompson & Opfer，2008）。数量估计是在不同量表征之间转换的过程，而数字线估计就是将数字转化为数字线上空间位置的过程（Siegler & Booth，2005）。这种外在的数字符号表征和内在的数量表征转换的功能是理解数量表征的核心（Siegler，Thompson，& Opfer，2009）。因此本研究亦使用该任务来评估儿童的数量表征能力。

基于数量发展整合理论，本研究预期整数数量表征与分数数量表征有显著正相关。进一步地，整合以往研究（Fazio et al.，2013；Thompson & Opfer，2008），本研究预期处于儿童早期的三四年级刚开始接触分数，其对分数的掌握还处于比较初级的阶段，正如整数偏向现象揭示的，其分数的理解可能受到整数的影响和干扰，分数数量表征与整数数量表征表现出负相关或者没有显著相关。而五六年级儿童学习了分数的四则运算规则，对分数的理解进一步加深，这时整数数量表征与分数数量表征很可能表现出显著的正相关，整数数量表征能够预测分数数量表征。

此外，本研究亦将考察儿童整数数量表征和分数数量表征的表征模型的发展特点。以往研究表明，儿童整数数量表征会随着年龄的增长由不精确的对数表征转化为精确的线性表征（Siegler & Opfer，2003；Opfer & Siegler，2007；Thompson & Opfer，2010；Siegler，Thompson，& Opfer，2009）。例如，Siegler 和 Opfer（2003）的研究发现在 0～1000 数字线估计任务上，二年级学生的数量估计值更好地拟合对数模型，四年级学生的线性模型和对数模型没有显著差异，六年级学生的数量估计更好地拟合线性模型。儿童的数量估计从二年级、四年级到六年级产生了一个从依赖对数表征到依赖线性表征的转换。李晓芹（2008）以中国儿童为被试发现在 0～1000 数字线任务上，二年级儿童数量估计值的线性模型和对数模型拟合程度差异不显著，四、六年级儿童的估计值更符合线性模型。周广东等（2009）的研究表明，一年级儿童有一半采用对数表征，另一半采用线性表征，而三五年级儿童大多采用线性表

征。本研究将以三～六年级儿童为被试考察是否能重复出以往研究的结果。此外,以往对分数数量表征的研究主要关注高年级儿童的表征模型,目前尚无研究考察分数表征模型的发展变化。例如,研究表明,在 0～1 数字线估计任务上,六年级儿童的线性模型比对数模型拟合更好(Siegler, Thompson, & Schneider, 2011; Iuculano & Butterworth, 2011) 。以中国六年级儿童为被试的研究也得到了类似结果(郭红力, 2010) 。本研究将以三～六年级儿童为被试,考察儿童的表征模型是否经历从对数模型向线性模型的发展历程以及从哪个年级开始线性模型能更好地模拟儿童的分数估计。

2　研究方法

2.1　被试

以方便取样的方法选取了重庆市一所普通公立小学三～六年级各一个班的学生。三年级 34 人(平均年龄 8.75; 男女各半) ,四年级 42 人(平均年龄 9.78; 男生 22 人,女生 20 人) ,五年级 40 人(平均年龄 10.71; 男生 18 人,女生 22 人) ,六年级 39 人(平均年龄 11.95; 男生 18 人,女生 21 人) 。

2.2　材料

实验材料为两个 30 页的小册子,小册子第一页登记的均是被试的基本资料(性别、年龄及班级) 。一个小册子后面 29 页是 0～1000 的整数数字线估计任务,另一小册子后面 29 页是 0～1 的分数数字线估计任务。

整数估计采用 0～1000 的数字线估计任务。任务中有一条长为 15 厘米的线段,线段左端标记 0,右端标记 1000,中间无任何标记,在线段中上方 2 厘米处有一个圆圈,圆圈里有一个让被试估计的数字。除圆圈里的数字不同外,每一页在其它方面均相同。任务中 0～200 之间选取了 15 个数字,200～1000 之间选取了 15 个数字。这 30 个数字分别为: 3、9、17、33、53、65、79、91、100、122、147、150、164、179、246、283、305、366、423、486、512、548、606、683、722、754、818、894、938、975。这些数字在周广东等(2009) 研究基础上增加了 3 个低端数字(17、33 和 79) 和 1 个高端数字 512。150 以下的低端数字在对数模型中鉴别性更高,而 150 以上的高端数字在线性模型中鉴别性更高(Thompson & Siegler, 2010) ,因此增加一些低端数字将能更好的区分对数表征与线性表征。而之所以增加 512,是为了使 200 以后的百位数间均有 2 个数字。每一小册子上的数字均为随机呈现。

分数估计采用 0～1 的数字线估计任务。同样,每一页中间有一条长 15 厘米的线段,线段左端标记 0,右端标记 1,中间无任何标记。在线段中上方 2 厘米处有一个圆圈,圆圈里有一个让被试估计的数字。除圆圈里的数字不同外,每一页在其它方面均相同。在 0～1 数字线估计任务中,0～1/3 之间选取了 10 个数字,1/3～2/3 之间选取 10 个数字,2/3～1 之间选取了 9 个数字。这 29 个分数为: 1/19、1/7、1/4、3/8、1/2、4/7、2/3、7/9、5/6、12/13、2/7、2/13、1/12、1/6、3/13、3/11、1/3、4/11、4/9、5/9、7/12、3/5、5/8、7/11、5/7、8/11、3/4、7/8、11/12。前 10 个材料源自 Siegler 等(2011) 的研究。后面 19 个为本研究新增的。这些分数是按照必须为简分数、分子分母不超过 20,以及所有分数大致均匀地分布在数字线上为原则选择的。每一小册子上的数字均为随机呈现。

2.3　实验程序

每个班进行集体施测,由一名主试告诉儿童先填写基本信息,然后做一个数学小测试。测试题在小册子的第二页到最后一页,让儿童根据不同类型测试题的要求进行作答。并告诉儿童数学测验的成绩不计入学习成绩。实验过程中不允许用直尺量,并无任何反馈。整数估计和分数估计任务的顺序在被试间进行了平衡,即每个年级一半被试先进行整数估计任务,再进行分数估计任务; 另一半被试先进行分数估计任务,再进行整数估计任务。对被试的估计结果,由一名主试以直尺测量,精确到毫米,然后再转化成估计值。

3　结果分析

3.1　数字估计

分析了儿童数字估计的准确性和估计模型。

3.1.1　数字估计的准确性

首先,计算每个儿童的"绝对误差百分比(Percent Absolute Error, PAE) "。把每个被试每个数字的估计长度转化为估计值(估计长度等于起点 0 到被试标注估计数字所在位置之间的长度,估计值等于估计长度除以线段总长度然后乘以被估计的数值范围) ,然后根据公式算出 PAE。计算公式为: PAE = | 估计值 - 实际值 | ÷ 被估计的数值范围。PAE 越大,儿童的估计误差越大。

然后,以数字估计类型(整数估计和分数估计) 为组内变量,年级为组间变量,估计的准确性 PAE

为因变量进行 2 × 4 的重复测量方差分析。该分析排除了态度极不认真(所有数字均被估计在同一位置)以及整数或分数估计中有缺失值的被试，有效被试三年级 28 人，四年级 41 人，五年级 32 人以及六年级 21 人。表 1 呈现了各年级的整数和分数数字线估计 PAE 的描述性统计结果。

方差分析结果显示:(1)数字估计类型主效应显著: $F(1,119) = 180.55$，$p < 0.01$，$\eta^2 = 0.61$;(2)年级主效应显著，$F(3,117) = 10.02$，$p < 0.01$，$\eta^2 = 0.20$;(3)数字估计类型与年级交互作用显著，$F(3,117) = 24.46$，$p < 0.01$，$\eta^2 = 0.38$。进一步简单效应分析分别对整数估计 PAE 和分数估计 PAE 的年级效应进行了考察。结果表明，整数估计的 PAE 年级主效应不显著($p > 0.10$)，分数估计的 PAE 年级主效应显著，$F(3,117) = 17.45$，$p < 0.01$。进一步分析主要考察了相邻年级的 PAE 差异。结果表明只有四五年级的差异达到显著性水平，五年级儿童的估计准确性显著高于四年级儿童，$t(62) = 5.39$，$p < 0.01$，其他相邻年级的差异均不显著，$p > 0.10$。这些结果说明，儿童分数数字线估计准确性在五年级有显著提高，而整数的数字线估计准确性从三至六年级无显著变化，均保持在较高水平。

表 1　各年级整数和分数数字线估计 PAE 的描述性统计($M \pm SE$)

年级	整数估计 PAE(%)	分数估计 PAE(%)
三年级	7.62 ± 0.89	21.50 ± 1.68
四年级	5.67 ± 0.45	22.84 ± 1.73
五年级	7.51 ± 0.65	11.57 ± 1.55
六年级	7.09 ± 0.85	9.96 ± 1.39

3.1.2　数字估计模型

3.1.2.1　整数估计的模型

排除了态度极不认真(所有数字均被估计在同一位置)以及整数估计中有缺失值的被试，有效被试三年级 29 人，四年级 41 人，五年级 35 人和六年级 27 人。

以实际呈现的数值为自变量，以儿童估计值的中位数为因变量，对各个年级儿童 0 ~ 1000 整数的数字线估计情况进行了线性函数与对数函数的曲线拟合。如图 1，所有年级儿童的数字估计均很好地拟合了线性函数(三年级 $R^2_{\text{lin}} = 0.98$; 四年级 $R^2_{\text{lin}} = 0.99$; 五年级 $R^2_{\text{lin}} = 0.99$; 六年级 $R^2_{\text{lin}} = 0.99$)。然而，估计的对数函数拟合亦非常显著，三年级 $R^2_{\text{log}} = 0.68$; 四年级 $R^2_{\text{log}} = 0.69$; 五年级 $R^2_{\text{log}} = 0.67$; 六年级 $R^2_{\text{log}} = 0.68$。

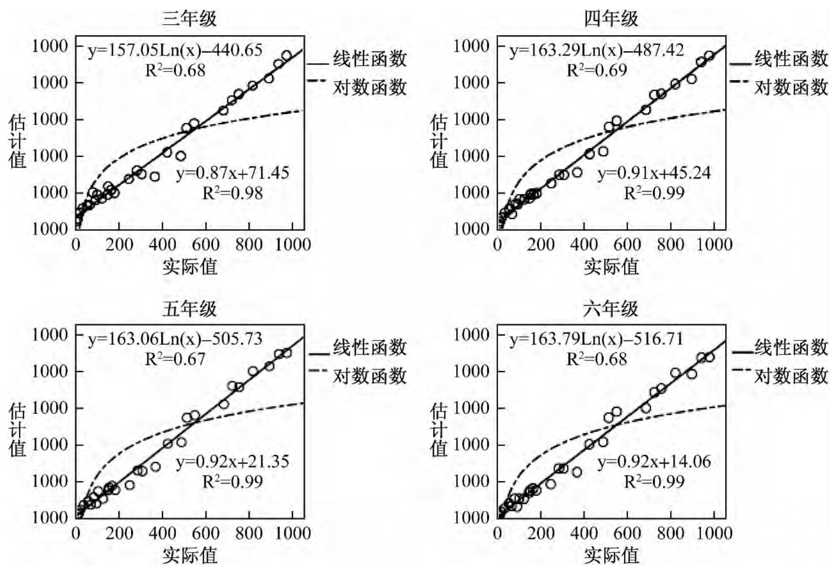

图 1　不同年级儿童在 0 ~ 1000 范围整数数字估计的曲线拟合图

为增加判定儿童采用何种表征形式的确定性，对线性函数与对数函数差异的显著性进行了统计检验，即对两模型预测值的绝对误差进行了配对 t 检验。结果显示: 对于所有年级的儿童都是线性模型显著好于对数模型，三年级 $t(28) = -7.17$，$p < 0.01$; 四年级 $t(28) = -7.83$，$p < 0.01$; 五年级 $t(28) = -7.47$，$p < 0.01$; 六年级 $t(28) = -7.70$，$p < 0.01$。

为检验这种总体的拟合结果与个体估计拟合的结果是否一致，以实际呈现的数值为自变量，以每一个儿童的估计值为因变量，分别对每个儿童的数字线估计进行对数函数与线性函数的曲线拟合。结果表明，多数儿童的整数估计拟合线性表征: 三年级

86%，四年级 100%，五年级 89% 和六年级 85%。剩余儿童的线性表征和对数表征差异不显著，三年级 14%，五年级 11% 和六年级 15%。这种结果与不同年级的总体拟合结果是一致的，即儿童的整数估计更好地拟合了线性表征。

3.1.2.2　分数估计的模型

排除了态度极不认真(所有数字均被估计在同一位置)以及分数估计中有缺失值的被试，有效被试三年级 33 人，四年级 42 人，五年级 37 人，六年级 33 人。以实际呈现的数值为自变量，以儿童估计值的中位数作为因变量，选取线性函数与对数函数两个拟合模式，对各年级儿童在 0～1 分数数字线上的估计值进行曲线拟合。结果如图 2:(1) 对于三、四年级儿童，其分数估计模式没有表现出偏向，线性模型和对数模型预测值的绝对误差差异不显著，三年级 $t(28) = -1.95$，$p = 0.061$，四年级 $t(28) = -1.78$，$p = 0.09$;(2) 对于五、六年级的儿童，其估计的模式更好地拟合了线性模型。配对 t 检验结果表明，线性模型的预测结果显著优于对数模型，五年级 $t(28) = -5.51$，$p < 0.01$，$R^2_{lin} = 0.99 > R^2_{log} = 0.86$; 六年级 $t(28) = -3.50$，$p < 0.01$，$R^2_{lin} = 0.98 > R^2_{log} = 0.85$。

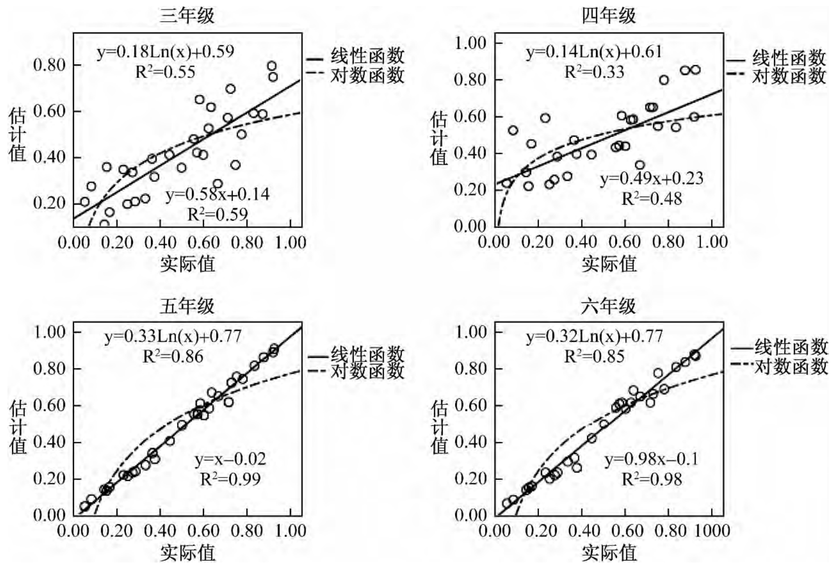

图 2　不同年级儿童在 0～1 范围分数数字估计的曲线拟合图

为检验这种总体的拟合结果与个体估计拟合的结果是否一致，以实际呈现的数值为自变量，以每一个儿童的估计值为因变量，分别对每个儿童的分数估计进行了对数函数与线性函数的曲线拟合。结果发现，所有年级儿童的估计拟合出现了三种情况: 只有线性表征拟合显著、线性表征与对数表征拟合均显著但两者差异不显著以及线性表征与对数表征拟合均不显著。每个年级的估计拟合人数分布见表 2。卡方检验显示，年级对儿童估计的拟合函数状况有显著影响，$\chi^2(6,145) = 41.56$，$p < 0.01$。进一步分析表明三四年级的拟合状况差异不显著，$\chi^2(2,75) = 2.20$，$p = 0.332$; 四、五年级差异显著，$\chi^2(2,79) = 17.18$，$p < 0.01$; 五、六年级差异不显著，$\chi^2(2,70) = 1.86$，$p = 0.340$。可以看出，符合线性表征的儿童至五年级时有显著增加，同时两种表征均不显著的人数有显著减少。这个结果与总体曲线拟合的结果亦基本一致。

表 2　不同年级儿童分数估计的个体拟合人数分布(%)

	三年级	四年级	五年级	六年级
线性表征拟合显著	18.18	26.19	62.16	66.67
线性表征与对数表征差异不显著	24.24	11.91	21.62	27.27
线性表征与对数表征拟合均不显著	57.58	61.9	16.22	6.06

3.2　整数估计和分数估计的关系

排除了态度极不认真(所有数字均被估计在同一位置)以及整数或分数估计中有缺失值的被试，有效被试三年级 28 人，四年级 41 人，五年级 32 人，六年级 21 人。首先，相关分析发现，整数估计和分数估计的 PAE 相关为 0.30，$p < 0.01$，即整数估计越准确则分数估计越准确。

其次，为了考察不同年级儿童整数估计和分数估计的关系是否存在差异，进行了线性混合模型分析(LMM)。该模型以分数估计的 PAE 为因变量，以年级、整数估计的 PAE、年级与整数估计的 PAE

的交互作用作为固定因子，以被试为随机因子。结果发现，年级、整数估计 PAE、年级与整数估计 PAE 的交互作用对分数估计 PAE 的预测作用均显著，见表 3。

表 3　年级、整数估计对分数估计影响的混合模型分析

自变量	*df*1	*df*2	*F*	*p*
Intercept	1	114	35.39	0.000
年级	3	114	13.94	0.000
整数估计 PAE	1	114	30.45	0.000
年级 × 整数估计 PAE	3	114	3.77	0.013

进一步的分析结果见表 4。五、六年级儿童的整数估计对分数估计预测作用显著，而三、四年级的整数估计对分数估计预测作用不显著。而且四、五年级儿童的整数估计对分数估计的预测作用存在显著差异(−1.49) 。可见，年级对整数估计和分数估计的关系产生了影响。

表 4　不同年级整数估计对分数估计的预测作用效应值

自变量	年级	Estimate	*SE*	*df*	*t*	*p*
整数数字线 PAE	3	0.45	0.30	114	1.64	0.104
	4	0.61	0.43	114	1.40	0.163
	5	2.09	0.40	114	5.26	0.000
	6	1.05	0.39	114	2.66	0.009
年级 × 整数数字线 PAE	3 ~ 4	−0.12	0.52	114	−0.22	−0.804
	4 ~ 5	−1.49	0.59	114	−2.53	0.013
	5 ~ 6	1.05	0.56	114	1.87	0.064

4　讨论

与预期一致，研究结果表明儿童整数数量表征和分数数量表征呈正相关。然而，年级对两者的关系产生了影响，三四年级儿童的整数数量表征对分数数量表征预测作用不显著，只有五六年级显著。三四年级儿童的结果与 Thompson 和 Opfer(2008) 的研究存在不一致。其研究发现一 ~ 三年级儿童的整数数量表征与分数数量表征存在显著负相关($r = -0.80$) 。这种不一致原因可能是他们采用的是分子为 1 的同分子分数以及研究对象儿童的平均年龄较小。当分子相同时，儿童尤其是尚未学习分数概念的一二年级儿童，很可能只根据分母的大小而不是分数的实数值在数字线上估计分数大小。因而整数数量表征与分数的分母表征正相关而与分数的实数值负相关。五六年级儿童的结果与 Fazio 等(2013) 的研究一致。这可能是因为对异分子异分母分数的大小进行估计时，五六年级儿童的分数理解越来越深入，能够更准确地表征分数的实数值，其分数估计能更好地模拟线性模型(Iuculano & Butterworth，2011; Siegler，Thompson，& Schneider，2011) 。整数和分数数量表征均为线性模型，这就容易理解两者的正向相关。

整数数量表征和分数数量表征的关系受到了年级的影响。此结果的理解首先需要了解儿童是如何将心理数字线的表征从整数拓展到分数的。整数数量表征发展的研究表明数字间的类比扮演着重要角色(Siegler et al.，2011) 。Thompson 和 Opfer (2010) 发现鼓励二年级从 0 ~ 100 与 0 ~ 1000，0 ~ 10000，0 ~ 100000 中找到相似点会使得儿童将线性表征从比较小的数字范围扩展到比较大的数字范围。Siegler 等(2011) 研究中六、八年级所报告的数字线估计策略表明被试将这种方法运用到分数数量表征中。一个常见的有效策略是将被估计的分数转化为小数和百分数，然后像 0 ~ 100 上的整数那样使用百分比。例如，一个儿童可能会认为 3/5 就是 0 和 1 之间距离的 60%，然后就像将 60 定位在 0 ~ 100 上一样进行分数定位。本研究中五六年级在分数估计准确性上较三四年级有一个较大的提高可能是因为五年级学习了小数，六年级学习了百分数。而不正确的类比在学习分数中很可能扮演的角色就是之前提到过的整数偏向，它源于整数对分数不恰当的非本质的迁移。另外一个重要原因可能是有关分数规则知识的掌握，比如说分数值随着分母的增大而减小，随着分子的增大而增大。三年级学生只学习了分数的初步知识，比如说分数所代表的意义，以及简单的同分母分数的加减法; 四年级没有安排分数的学习。所以三、四年级学生对分数的掌握还比较差，而五六年级则学习了分数的四则运算，对分数的理解和规则的掌握有了很大提高。

与周广东等(2009) 的结果一致，中国儿童精确数字估计能力的出现要早于西方儿童，早在三年级儿童就主要采取了线性模型估计整数的大小。这与以往跨文化研究的结果一致。比如，有研究表明在小学阶段中国儿童的数学成绩上好于美国儿童，这种差异甚至在幼儿园阶段就已出现(Geary，Bow-Thomas，Fan，& Siegler，1993) 。至于分数表征的发展，本研究发现儿童并没有表现出从对数表征到线性表征转换的趋势。直至五六年级儿童才表现出明显的线性趋势，但是之前的三四年级多数儿童线性模型和对数模型均不显著。该现象的原因可能是对于异分子异分母分数，三四年级儿童的表征比较模糊，没有稳定的表征策略。首先，没有完全根据分母来表征分数。若只根据分母来表征，正如对待同

分子分数一样,儿童的表征将会表现出对数模型的优势(Opfer & DeVries,2008)。其次,没有完全根据分数的实数值来表征,因而没有表现出线性表征的优势。总之,儿童的表征可能是随机的,不稳定的,遇到非常熟悉的比如 1/2、1/4 等可能根据实数值来表征,而对于不熟悉的则可能根据分母或分子进行表征。

总之,五六年级儿童整数数字线估计对分数数字线估计的积极预测作用说明整数数量的理解是分数理解的重要前提,这为 Siegler 等提出的分数和整数的发展具有联系的观点提供支持(2011,2013)。这一发展可能是通过心理数字线表征实现的。正如数量发展的整合模拟所阐述的,心理数字线是整数的中心概念结构,对儿童的数学表现和学习至关重要。而数字线估计任务为潜在的心理数字线表征提供了一个纯粹的测量(Booth & Siegler,2008)。因而,儿童的数字线估计与其他数学任务强烈相关(包括计数、运算、分类数字的记忆等)(Booth & Siegler,2006; Laski & Siegler,2007; Siegler et al.,2011; Siegler & Ramani,2008)。数字线估计也和数学成就测试的分数显著相关(Booth & Siegler,2006; Siegler & Booth,2004; Siegler et al.,2011)。具体到本研究中,整数数字线估计是分数数字线估计的重要前提就不难理解。五六年级儿童整数数字线估计对分数数字线估计的积极预测作用也意味着强调整数的测量意义可能有助于提高儿童的分数表征能力。同时,强调分数的测量意义,有助于儿童理解分数和整数的联系和相似点。此外,儿童在分数学习初期即三四年级时整数表征与分数表征没有显著相关,五年级之后两者才表现出正相关。这一结果丰富了 Siegler 等的观点(2011,2013),说明年级对分数和整数表征的关系产生了影响,整数表征对分数表征的积极影响需要经历一定的时间,当儿童分数知识掌握较好时才会表现出来。因此,教学中教师应积极促进儿童对分数知识的理解和掌握。

5 小结

本研究考察了整数数量表征和分数数量表征的关系以及年级对两者关系的影响。结果表明整数数量表征和分数数量表征呈显著正相关,不过年级对两者的关系产生了影响,只有五六年级儿童的整数数字线估计对分数数字线估计有显著预测作用。这一结果支持并丰富了数量发展的整合模型。

参考文献:

Bonato,M., Fabbri, S., Umiltà, C., & Zorzi, M. (2007). The mental representation of numerical fractions: Real or integer? *Journal of Experimental Psychology: Human Perception and Performance*, *33*, 1410－1419.

Bright, G. W., Behr, M. J., Post, T. R., & Wachsmuth, I. (1988). Identifying fractions on number lines. *Journal for Research in Mathematics Education*, *19*(3), 215－232.

Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2006). Developmental and individual differences in pure numerical estimation. *Developmental Psychology*, *42*(1), 189－201.

Booth, J. L., & Siegler, R. S. (2008). Numerical magnitude representations influence arithmetic learning. *Child Development*, *79* (4), 1016－1031.

Carpenter, T. P., Corbitt, M. K., Kepner, H., Jr., Lindquist, M. M., & Reys, R. (1981). *Results from the second mathematics assessment of the National Assessment of Educational Progress*. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.

Fazio, L. K., Bailey, D. H., Thompson, C. A., & Siegler, R. S. (2013, Apr). Relations of symbolic and non-symbolic fraction and whole number magnitude representations to each other and to mathematics achievement. *Spoken presentation to be given at the biennial meeting of the Society for Research on Child Development*, Seattle, WA.

Hecht, S., Vagi, K., & Torgensen, J. (2007). Fraction skills and proportional reasoning. In: Berch, D., Mazzocco, M. (Eds.), *Why is math so hard for some children* (pp. 121－132). Paul H. Brookes Publishing, Baltimore.

Gallistel, C. R., & Gelman, R. (1992). Preverbal and verbal counting and computation. *Cognition*, *44*(1), 43－74.

Geary, D. C., Frensch, P. A., & Wiley, J. G. (1993). Simple and complex mental subtraction: Strategy choice and speed-of-processing differences in younger and older adults. *Psychology and Aging*, *8*, 242－256.

Iuculano, T., & Butterworth, B. (2011). Understanding the real value of fractions and Decimals. *The Quarterly Journal of Experimental Psychology*, *64*(11), 2088－2098.

Laski, E. V., & Siegler, R. S. (2007). Is 27 a big number? Correlational and causal connections among numerical categorization, number line estimation, and numerical magnitude comparison. *Child Development*, *76*,1723－1743.

Mack, N. (1995). Confounding whole-number and fraction concepts when building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, *26*, 422－441.

Mix, K. S., Huttenlocher, J., & Levine, S. C. (2002). Multiple cues for quantification in infancy: Is number one of them?. *Psychological Bulletin*, *128*(2), 278－294.

Ni, Y., & Zhou, Y. (2005). Teaching and learning fraction and rational numbers: The origins and implications of whole number bias. *Educational Psychologist*, *40* (1), 27－52.

Opfer, J. E., & Devries, J. M. (2008). Representational Change and

Magnitude Estimation: Why Young Children can Make More Accurate Salary Comparisons than Adults. *Cognition*, *108*(3), 843 – 849.

Opfer, J. E., & Siegler, R. S. (2007). Representational change and children's numerical estimation. *Cognitive Psychology*, *55*, 169 – 195.

Pearn, C., & Stephens, M. (2004). Why do you have to probe to discover what Year 8 students really think about fractions. In I. Putt, R. Faragher, & M. McLean (Eds.), *Mathematics education for the third millennium: Towards* 2010 (Vol. 2, pp. 430 – 437). Sydney: MERGA.

Posner, G. J., Strike, K. A., Hewson, P. W., & Gertzog, W. P. (1982). Accommodation of a scientific conception: Toward a theory of conceptual change. *Science Education*, *66*(2), 211 – 227.

Stafylidou, S., & Vosniadou, S. (2004). The development of student's understanding of the numerical value of fractions. *Learning and Instruction*, *14*(5), 508 – 518.

Smith, C. L., Solomon, G. E. A., & Carey, S. (2005). Never getting to zero: Elementary school students' understanding of the infinite divisibility of number and matter. *CognitivePsychology*, *51*, 101 – 140.

Siegler, R. S., & Booth, J. L. (2004). Development of numerical estimation in young children. *Child Development*, *75*(2), 428 – 444.

Siegler, R. S., Fazio, L. K., Bailey, D. H., & Zhou, X. (2013). Fractions: The new frontier for theories of numerical development. *Trends in Cognitive Science*, *17*, 13 – 19.

Siegler, R. S., & Opfer, J. (2003). The development of numerical estimation: Evidence for multiple representations of numerical quantity. *Psychological Science*, *14*, 237 – 243.

Siegler, R. S., & Ramani, G. B. (2008). Playing linear numerical board games promotes low-income children's numerical development. *Development Science*, *11*(5), 655 – 661.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Opfer, J. E. (2009). The logarithmic-to-linear shift: One learning sequence, many tasks, many time scales. *Mind, Brain, and Education*, *2*, 143 – 150.

Siegler, R. S., Thompson, C. A., & Schneider, M. (2011). An integrated theory of whole number and fractions development. *Cognitive Psychology*, *62* (4), 273 – 296.

Thompson, C. A., & Opfer, J. E. (2008). Costs and benefits of representational change: Effects of context on age and sex differences in symbolic magnitude estimation. *Journal of Experimental Child Psychology*, *101*(1), 20 – 51.

Thompson, C. A., & Opfer, J. (2010). How 15 hundred is like 15 cherries: Effect of progressive alignment on representational changes in numerical cognition. *Child Development*, *81*, 1768 – 1786.

Thompson, C. A., & Siegler, R. S. (2010). Linear numerical magnitude representations aid children's memory for numbers. *Psychological Science*, *21*, 1274 – 1281

周广东，莫雷，温红博.（2009）. 儿童数字估计的表征模式与发展. 心理发展与教育，25(4)，21 – 29.

张丽，辛自强，王琦，李红.（2012）. 整数构成对分数加工的影响. 心理发展与教育，1，37 – 44.

李晓芹. 小学儿童数字线估计的发展研究. 曲阜师范大学，2008.

郭红力. 小学高年级儿童的分数数量表征. 山东师范大学，2010.

Relationship between the Magnitude Representation of Whole Numbers and Fractions for 3 to 6 Graders

ZHANG Li[1] LU Cai-fang[1] YANG Xin-rong[2]

(1. *Faculty of Psychology, Southwest University, Chongqing* 400715;

2. *Department of Mathematics and Statistics, Southwest University, Chongqing* 400715)

Abstract: In order to explore the relationship between whole number magnitude representation and fraction magnitude representation as well as the influence of grade on the relationship, this study examined the performance of 155 third to sixth graders in the 0-1000 whole number line and 0-1 fraction line estimation tasks. The results showed (1) For whole number estimate, the estimates of most children fitted a linear function; (2) But for symbolic fractions only fifth and sixth graders produced estimates consistent with a linear function; (3) As a whole, whole number magnitude representation (WMR) was positively related to symbolic fraction magnitude representation (SFMR). However, the grade had significant influence on the relationship between WMR and SFMR: only fifth and sixth graders' WMR could significantly predict SFMR but third and fourth grader's WMR could not.

Key words: number line estimation; magnitude representation; logarithmic function; linear function