第29卷第1期 统计与信息论坛 2014年1月
Vol. 29 No. 1 Statistics & Information Forum Jan., 2014

【统计理论与方法】

基于改进得分函数的直觉模糊多属性决策方法

吴　冲，刘　千，万翔宇
（哈尔滨工业大学 经济与管理学院，黑龙江 哈尔滨 150001）

摘要：针对属性权重信息完全未知的直觉模糊多属性决策问题进行了探究，提出了一种综合考虑隶属度、非隶属度以及犹豫度的新的得分函数，利用改进的得分函数将传统的熵权法推广到直觉模糊领域，为属性权重完全未知的直觉模糊多属性决策问题提供了一个新的排序方法。实际的铁路冻害整治算例进一步说明该方法的可行性和有效性。

关键词：直觉模糊集；多属性决策；改进的得分函数；熵权法
中图分类号：C934　　文献标志码：A　　文章编号：1007－3116(2014)01－0003－06

一、引　言

自从 Zadeh 于 1965 年提出模糊集理论[1]以来，该理论已在现代社会的各个领域得到广泛应用。Atanassov 对 Zadeh 的模糊集进行了拓展，把仅考虑隶属度的传统模糊集推广到同时考虑隶属度、非隶属度和犹豫度这三个方面信息的直觉模糊集[2-5]。由于直觉模糊集比传统的模糊集能够更细腻的描述和刻画客观世界的模糊性本质[6]，近年来，人们对直觉模糊及模糊多属性决策的研究产生了浓厚的兴趣并取得了丰硕的研究成果。Papakostas，Hatzimichailidis 和 Kaburlasos 从模式识别角度对直觉模糊集的距离和相似度进行了比较[7]；Eulalia Szmidt 等运用直觉模糊集对信息量进行了度量[8]；在模糊多属性决策方面，王坚强等针对权重信息不完全确定和属性值为梯形模糊数的多准则决策问题，提出一种基于梯形模糊数的信息不完全确定的多准则决策方法[9]；Liu 和 Wang 从得分函数的角度出发提出了直觉模糊多属性决策的新的方法[10]；Chen 等将决策者对各方案的态度特征考虑在内，提出了一个更符合实际的多属性决策方法[11]；Liu 等则考虑了决策者的风险偏好问题[12]。

然而，直觉模糊理论和模糊多属性决策理论，无论在理论研究还是实际应用上，目前都还很不成熟，仍面临着新的挑战，尤其是有关由模糊集理论方法向直觉模糊理论方法的推广研究还有待于进一步细化与完善。比如多属性决策中用于排序的得分函数虽然引起了广泛的研究[10],[13-16]，但是这些得分函数在实际应用中要么和实际情况不相符[13-14]，要么难于操作[10],[15-16]。比如 Xu 所提出的得分函数规则[13]，因没有考虑到投票模型中弃权人群对决策的影响，因而会产生和实际不相符的结果；而 Liu 和 Wang 等虽然考虑到了弃权人群的影响[10]，但所提出的得分函数中包含两个未知参数很难客观给出，因此很难应用于实践。本文研究重点即在于基于投票角度，分析现有得分函数欠缺之处，并综合考虑赞成、反对、弃权三部分人群对决策的影响，提出一个新的得分函数；应用改进的得分函数将传统的熵权法推广到直觉模糊领域，使得决策者可以直接利用决策矩阵信息进行相关决策，而不需要寻找有关权

收稿日期：2013－06－10
基金项目：国家自然科学基金项目《基于改进的概率神经网络的分类预测方法的理论、算法与运用研究》(71271070)；2011年国家社会科学基金项目《基于金融效率视角的我国农村新型金融组织发展研究》(11BJY080)
作者简介：吴　冲，男，黑龙江哈尔滨人，教授，博士生导师，研究方向：预测与决策理论与方法；
刘　千，女，黑龙江哈尔滨人，讲师，研究方向：决策理论与方法；
万翔宇，女，山西临汾人，硕士生，研究方向：决策理论与方法。

重的额外信息，从而为属性权重未知的直觉模糊多属性决策问题的解决提供了一个可行的方法。该方法操作比较便捷，可广泛应用于铁路既有线路冻害整治等实际问题之中。

二、直觉模糊集

定义 1[2] 设 X 是一个非空集合，则称

$$A=\{\langle x,\mu_A(x),\nu_A(x)\rangle \mid x\in X\} \tag{1}$$

为直觉模糊集，其中 $\mu_A(x)$ 和 $\nu_A(x)$ 分别为 X 中元素 x 属于 A 的隶属度和非隶属度，即

$$\mu_A: X\to[0,1], x\in X\to\mu_A(x)\in[0,1],$$
$$\nu_A: X\to[0,1], x\in X\to\nu_A(x)\in[0,1].$$

且满足条件

$$0\leqslant\mu_A(x)+\nu_A(x)\leqslant 1, x\in X \tag{2}$$

此外

$$\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\nu_A(x), x\in X \tag{3}$$

表示 X 中元素 x 属于 A 的犹豫度或不确定度。

Szmidt 和 Kacprzyk 称 $\pi_A(x)$ 为 X 中元素 x 属于 A 的直觉指标[17]，且 $0\leqslant\pi_A(x)\leqslant 1, x\in X$。特别地，若

$$\pi_A(x)=1-\mu_A(x)-\nu_A(x)=0, x\in X \tag{4}$$

则 A 退化为 Zadeh 的模糊集。因此，Zadeh 的模糊集是直觉模糊集的一个特例。

为了方便起见，称 $\alpha=(\mu_\alpha,\nu_\alpha)$ 为直觉模糊数，其中

$$\mu_\alpha\in[0,1],\nu_\alpha\in[0,1],0\leqslant\mu_\alpha+\nu_\alpha\leqslant 1 \tag{5}$$

且设 Θ 为全体直觉模糊数的集合。显然，$\alpha^+=(1,0)$ 为最大的直觉模糊数，$\alpha^-=(0,1)$ 为最小的直觉模糊数。

三、得分函数

若一投票案例中的一个直觉模糊数 $(\mu_\alpha,\nu_\alpha)=(0.5,0.4)$，则其表示的含义就是“对于某一个方案，若有 10 人参加投票，则投票结果就是有 5 人赞同，有 4 人反对，还有 1 人保持中立”。

任给一个直觉模糊数，可以通过得分函数来对其进行评估[18]：

$$s(\alpha)=\mu_\alpha-\nu_\alpha \tag{6}$$

其中 $s(\alpha)$ 为 α 的得分值，显然，$s(\alpha)\in[-1,1]$。

由式(6)可知：直觉模糊数 α 的得分值与其隶属度 μ_α 和非隶属度 ν_α 的差值直接相关，即 μ_α 和 ν_α 的差值越大，则 α 的得分值越大，从而直觉模糊数 α 越大。但是在某些特殊的情况下，无法通过得分函数来比较直觉模糊数的大小。如对于直觉模糊数 $\alpha_1=(0.7,0.2)$ 和 $\alpha_2=(0.6,0.1)$，由式(6)可知，$s(\alpha_1)=0.7-0.2=0.5$，$s(\alpha_2)=0.6-0.1=0.5$，也就是说 $s(\alpha_1)=s(\alpha_2)$，因此，根本无法确定到底是 α_1 大还是 α_2 大。

Hong 和 Choi 给出了另一种刻画直觉模糊数的函数[19]，称之为精确函数：

$$h(\alpha)=\mu_\alpha+\nu_\alpha \tag{7}$$

其中 $\alpha=(\mu_\alpha,\nu_\alpha)$ 为直觉模糊数，称 $h(\alpha)$ 为 α 的精确度。$h(\alpha)$ 值越大，表示直觉模糊数 α 的精确度越高。上例中，$h(\alpha_1)=0.7+0.2=0.9$，$h(\alpha_2)=0.6+0.1=0.7$，显然，$h(\alpha_1)>h(\alpha_2)$，也就是说直觉模糊数 α_1 的精确度要高于直觉模糊数 α_2。

可以说，得分函数 s 和精确函数 h 类似于统计学中的均值和方差，统计学中的均值和方差是对样本分布的有效估计。方差越小，估计的结果越好。可以认为：在直觉模糊数的得分函数值相等的情况下，精确度越高，相应的直觉模糊数越大。

定义 2[13] 设 $\alpha_1=(\mu_{\alpha_1},\nu_{\alpha_1})$ 和 $\alpha_2=(\mu_{\alpha_2},\nu_{\alpha_2})$ 为直觉模糊数，$s(\alpha_1)$ 和 $s(\alpha_2)$ 分别是 α_1 和 α_2 的得分值，$h(\alpha_1)$ 和 $h(\alpha_2)$ 分别是 α_1 和 α_2 的精确度，则

(1) 若 $s(\alpha_1)<s(\alpha_2)$，则 $\alpha_1<\alpha_2$；

(2) 若 $s(\alpha_1)=s(\alpha_2)$，则 $h(\alpha_1)=h(\alpha_2)$ 时，$\alpha_1=\alpha_2$；$h(\alpha_1)<h(\alpha_2)$ 时，$\alpha_1<\alpha_2$；$h(\alpha_1)>h(\alpha_2)$ 时，$\alpha_1>\alpha_2$。

在实际判断方案优劣时，不难发现上述得分函数和精确函数的局限性，如例 1 所示。

例 1 现有两个直觉模糊数 $\alpha_1=(0.7,0.1)$ 和 $\alpha_2=(0.6,0.0)$，根据实际情况，仍然采用投票模型来解释，人们会认为，α_2 所代表的方案要优于 α_1 代表的方案，因为除了弃权的 40%，其他的 60% 均表示赞成。

现用上述得分函数和精确函数来评判 α_1，α_2 优劣，由式(6)可知，$s(\alpha_1)=0.7-0.1=0.6$，$s(\alpha_2)=0.6-0.0=0.6$，也就是说 $s(\alpha_1)=s(\alpha_2)$，这种情况下，采用精确函数 h 来判断它们的大小，由于 $h(\alpha_1)=0.7+0.1=0.8$，$h(\alpha_2)=0.6+0.0=0.6$，$h(\alpha_1)>h(\alpha_2)$，因此在使用它们作为评判方案优劣的标准时，一般认为 α_1 代表的方案要优于 α_2 所代表的方案，显然与实际情况不符。

所以，在评判方案优劣时，应将弃权人群对决策的影响考虑在内，基于这一情况，Wang，Zhang 和 Liu 给出如下的修正得分函数[14]：

$$S_W(\alpha)=\mu_\alpha-\nu_\alpha+\frac{1-\mu_\alpha-\nu_\alpha}{2} \tag{8}$$

该公式同时考虑了赞成、反对和弃权三个部分，分别为：μ_α，ν_α 和 $1-\mu_\alpha-\nu_\alpha$。得分函数值越大，方案

就越满足决策者的要求。但是该得分函数仍然没有完全克服例1中所描述的问题，如下例所示。

例2　仍考虑例1中的两个直觉模糊数 $\alpha_1=(0.7,0.1)$ 和 $\alpha_2=(0.6,0.0)$，由式(8)可知，$s(\alpha_1)=0.5$，$s(\alpha_2)=0.4$，$s(\alpha_1)>s(\alpha_2)$，认为 α_1 代表的方案要优于 α_2 所代表的方案，显然也与实际情况不符。

Liu和Wang将弃权人群分割成 n 组，提出如下得分函数[10]：

$$S_n(\alpha)=\mu_\alpha+a\pi_\alpha+a(1-a-b)\pi_\alpha+\cdots+a(1-a-b)^{n-1}\pi_\alpha \tag{9}$$

其中，$a,b\in[0,1]$，$0\leqslant a+b\leqslant 1$。

对式(9)取极限后可得：

$$S_\infty(\alpha)=\mu_\alpha+\frac{a}{a+b}\pi_\alpha \tag{10}$$

该得分函数虽然也考虑了弃权人群对决策的影响，但是 a,b 的取值很难客观给出，因此，在实际应用中有很大的局限性。

经过分析，我们将弃权人群细化为三个部分，即弃权人群中倾向于赞成的人群、倾向于反对的人群以及仍倾向于弃权的人群，考虑 n 次投票对决策的影响，给出如下得分函数：

$$S'_n(\alpha)=\mu_\alpha+(\mu_\alpha-\nu_\alpha)\pi_\alpha+(\mu_\alpha-\nu_\alpha)^2\pi_\alpha^2+\cdots+(\mu_\alpha-\nu_\alpha)^n\pi_\alpha^n \tag{11}$$

在函数 $s'_n(\alpha)$ 中，给 n 次投票弃权者中倾向投赞成票和倾向于投反对票的比例的差值赋值为 $\mu_\alpha-\nu_\alpha$，$(\mu_\alpha-\nu_\alpha)^2$，……，$(\mu_\alpha-\nu_\alpha)^n$，这一赋权方法由实际情况来解释就是：对于一个选举活动，如果有80%的投票者投赞成票，而只有10%的人投反对票，那么一般来讲，剩下的由于各种原因弃权的10%的投票者中，倾向于投赞成票的人和倾向于投反对票的人的比例与之相同。这一赋权方法体现出投赞成票的人越多，弃权者中倾向投赞成票的比例越大，反之则越小。

对式(11)取极限后得到如下得分函数：

$$s'_\infty(\alpha)=\mu_\alpha+\frac{(\mu_\alpha-\nu_\alpha)\pi_\alpha}{1-(\mu_\alpha-\nu_\alpha)\pi_\alpha} \tag{12}$$

该得分函数综合考虑了赞成、反对和弃权三个方面，可以有效解决以往得分函数在评判方案优劣时与实际情况不符的情况，如下例所示。

例3　还是以 $\alpha_1=(0.7,0.1)$ 和 $\alpha_2=(0.6,0.0)$ 为例，根据新的得分函数，计算得：

$$s'(\alpha_1)=0.7+\frac{(0.7-0.1)\times 0.2}{1-(0.7-0.1)\times 0.2}=0.822$$

$$s'(\alpha_2)=0.6+\frac{(0.6-0.0)\times 0.4}{1-(0.6-0.0)\times 0.4}=0.916$$

因此，有 $s'(\alpha_2)>s'(\alpha_1)$，即直觉模糊数 α_2 所代表的方案更优些，这也和实际相符合。

四、基于改进得分函数的直觉模糊多属性决策方法

本节对属性权重信息完全未知且属性值为直觉模糊数的多属性决策问题进行了研究，提出了采用熵权法来确定属性权重并进而作出决策的方法。该方法利用信息熵基本原理，对属性权重进行有效分配，进而基于简单加权法则及改进的得分函数获得方案的排序。

（一）熵权法确定权值

在属性权重完全未知的情况下求解权重时，求得的权重必须和已知的数据相吻合，又由于权重未知，因此必须对未知的信息作最小的假定，求解权重的过程可以认为是从已知数据中提取信息的过程。

熵权法的基本思想是由于熵反应了信源的平均不确定性大小，因此，在决策系统中，方案在属性上的模糊指标值可由相关专家给出模糊数，而各方案在某个属性的属性值变异程度越大，该属性的信息熵越小，该属性提供的信息量越大，即该属性在方案排序中所起的作用越大，从而该属性的权重也应该越大；反之，某个属性的属性值变异程度越小，该属性的信息熵越大，该属性提供的信息量越小，即该属性在方案排序中所起的作用越小，从而该属性的权重也应该越小。因此，首先根据所定义的改进的得分函数计算出各属性得分函数值，并使其归一化，然后再计算出各属性上的信息熵，确定属性权重；最后集结各方案属性值，通过综合得分函数值进行排序。

对于属性值为直觉模糊数的多属性决策问题，设 $Y=\{Y_1,Y_2,\cdots,Y_n\}$ 为方案集，$G=\{G_1,G_2,\cdots,G_m\}$ 为该问题的属性集，且属性的权重向量 $\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n)^T$ 完全未知，其中 $\sum_{j=1}^{m}\omega_j=1$，$\omega_j\in[0,1]$，$(j=1,2,\cdots,m)$。设决策矩阵 $D=(d_{ij})_{n\times m}$ 为直觉模糊决策矩阵，其中 $d_{ij}=(\alpha_{ij},\beta_{ij})$。$\alpha_{ij}$ 表示方案 Y_i 满足属性 G_j 的程度，β_{ij} 表示 Y_i 不满足属性 G_j 的程度。且 $\alpha_{ij}\in[0,1]$，$\beta_{ij}\in[0,1]$，$0\leq\alpha_{ij}+\beta_{ij}\leq 1$，$(i=1,2,\cdots,n;j=1,2,\cdots,m)$。决策目的在于从方案集 Y 中找出若干个满意方案或一个最优方案。

上述权重完全未知的模糊多属性决策问题通常被分解为两部分，其一是旨在确定属性的模糊权值和方案在属性上的模糊指标值；其二是选取适当模糊算子将二者合成为代表该方案价值的模糊效用值，并对模糊效用值进行排序。

熵权法中，如何求得属性值的熵是关键，Shannon 在创立信息论的时候，这样定义一个离散信源的熵：若一个离散信源可以表示为：

$$F:\begin{bmatrix} x_1 x_2 \cdots x_n \\ p_1 p_2 \cdots p_n \end{bmatrix} \tag{13}$$

其中，随机变量 F 的先验概率为 p_i，$0\leqslant p_i\leqslant 1$，$\sum p_i=1$，$i=1,2,\cdots,n$，信源具有的不确定性，用先验概率分布 $P=\{p_1 p_2 \cdots p_n\}$ 来描述，则此信源的平均不确定性为：

$$H_s(P)=-k\sum_{i=1}^{n} p_i \log p_i \tag{14}$$

其中，常数 k 决定于所选用的单位，通常取 $k=1$，式(14)中的对数函数的底通常取 2、10 或 e。本节中，选取 e 作为对数函数的底。采用这一思想，将香农的信息熵推广到直觉模糊数的熵。

对直觉模糊决策矩阵 $D=(d_{ij})_{n\times m}$，$d_{ij}=(\mu_{ij},\nu_{ij})$，对每一个方案 $Y_i(i=1,2,\cdots,n)$，求解 Y_i 关于属性 G_j 的特征信息的得分函数值，仍旧采用改进的得分函数值式(12)，然后做归一化处理，使得

$$\tilde{s}(d_{ij})=\frac{s'(d_{ij})}{\sum_{i=1}^{n} s'(d_{ij})} \tag{15}$$

进而利用式(14)求各属性 G_j 的平均信息熵：

$$H_s(G_j)=-\frac{1}{\ln n}\sum_{i=1}^{n}\tilde{s}(d_{ij})\ln\tilde{s}(d_{ij}) \tag{16}$$

规定 $\tilde{s}(d_{ij})=0$ 时，$\tilde{s}(d_{ij})\ln\tilde{s}(d_{ij})=0$。之后利用如下公式即可求得各属性权重值：

$$\omega_j=\frac{1-H_s(G_j)}{\sum_{k=1}^{m}(1-H_s(G_k))}, j=1,2,\cdots,m \tag{17}$$

（二）决策步骤

依照以上思路，下面给出基于熵权法的直觉模糊多属性决策问题的决策步骤：

步骤 1　根据实际运用中数据求得直觉模糊决策矩阵 $D=(d_{ij})_{n\times m}$，其中，$d_{ij}=(\mu_{ij},\nu_{ij})$ 为方案 Y_i 关于属性 G_j 的特征信息，μ_{ij} 表示方案 Y_i 满足属性 G_j 的程度，ν_{ij} 表示方案 Y_i 不满足属性 G_j 的程度，于是得到所有方案 $Y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 关于所有属性 $G_j(j=1,2,\cdots,m)$ 的特征信息，如表 1 所示：

表 1　直觉模糊决策矩阵 D

	G_1	G_2	$\cdots$	G_m
Y_1	(μ_{11},ν_{11})	(μ_{12},ν_{12})	$\cdots$	(μ_{1m},ν_{1m})
Y_2	(μ_{21},ν_{21})	(μ_{22},ν_{22})	$\cdots$	(μ_{2m},ν_{2m})
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
Y_n	(μ_{n1},ν_{n1})	(μ_{n2},ν_{n2})		(μ_{nm},ν_{nm})

步骤 2　采用改进的得分函数式(12)计算各方案在各属性的得分函数值，得得分函数值矩阵 $S=(s'(d_{ij}))_{n\times m}$，然后利用式(15)进行归一化处理，得最终的得分函数矩阵 $\tilde{S}=(\tilde{s}(d_{ij}))_{n\times m}$，如表 2 和表 3 所示：

表 2　得分函数矩阵 S

	G_1	G_2	$\cdots$	G_m
Y_1	$s'(d_{11})$	$s'(d_{12})$	$\cdots$	$s'(d_{1m})$
Y_2	$s'(d_{21})$	$s'(d_{22})$	$\cdots$	$s'(d_{2m})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
Y_n	$s'(d_{n1})$	$s'(d_{n2})$		$s'(d_{nm})$

表 3　最终的得分函数矩阵 $\tilde{S}$

	G_1	G_2	$\cdots$	G_m
Y_1	$\tilde{s}(d_{11})$	$\tilde{s}(d_{12})$	$\cdots$	$\tilde{s}(d_{1m})$
Y_2	$\tilde{s}(d_{21})$	$\tilde{s}(d_{22})$	$\cdots$	$\tilde{s}(d_{2m})$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
Y_n	$\tilde{s}(d_{n1})$	$\tilde{s}(d_{n2})$		$\tilde{s}(d_{nm})$

步骤 3　利用式(16)计算各属性 G_j 输出的平均信息量，规定 $\tilde{s}(d_{ij})=0$ 时，$\tilde{s}(d_{ij})\ln\tilde{s}(d_{ij})=0$；

步骤 4　利用式(17)计算各属性 G_j 的权重系数；

步骤 5　求得每种方案的综合属性值，并按由大到小的顺序对方案进行排序。

若方案 Y_i 关于属性 $G_j(j=1,2,\cdots,m)$ 的特征信息 $d_{ij}=(\mu_{ij},\nu_{ij})(j=1,2,\cdots,m)$，则该方案的综合属性的得分值为：

$$f(Y_i)=\sum_{j=1}^{n} s'(d_{ij})\omega_j \quad i=1,2,\cdots,n \tag{18}$$

其中，$s'_{\infty}(\alpha)=\mu_\alpha+\frac{(\mu_\alpha-\nu_\alpha)\pi_\alpha}{1-(\mu_\alpha-\nu_\alpha)\pi_\alpha}$ 为改进的得分函数。

五、实例分析

据调查，中国寒冷地区铁路既有线路大都存在着设计标准低、施工不合理及填料选择不恰当的问题，这些是造成既有线路冻害产生的主要原因。铁路开通运营后，就会发生冻害，并且具有反复性。给日常线路维修增加工作量和行车安全带来隐患。既有线路路基冻害整治需采取有计划地路基大修进行解决。由于影响路基冻害的因素很多，具体冻害发生特点和程度不同，给冻害整治措施的确定带来了困难。

冻害的影响因素很多，有土质、水分、温度、土中含盐量等等因素，而对冻害的整治又要考虑到冻害所处的实际位置，以保证行车安全为第一要素。

哈尔滨铁路局阿城工务段所管辖的滨绥线124.12公里至124.45公里路段，地处在0.5米左右的低路堤地段，原线路两侧因地势低洼长年积水，浸泡路基致使路基含水量过大，最大冻害高度60毫米，最大冻胀深度为1.9米，最高行车速度80公里/小时，行车密度较大，路基土质为黄粘土，天然含水量$\omega=32\%\sim48\%$，此段线路每到冬季都产生较严重的冻害。

由于这段铁路地理位置比较特殊，故考虑以下六个因素：土质G_1、含水量G_2、冻害高度G_3、路基高度G_4、行车速度G_5、行车密度G_6。根据实际线路情况，确定了更换土质Y_1、改良土质Y_2、修排水设施Y_3、路基保温Y_4、铺设EPS板Y_5五种备选方案，现在要对这五种方案进行对比分析，来确定最终的最佳方案，各指标的权重向量$\omega=(\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6)^T$未知。

每种备选方案$Y_i(i=1,2,3,4,5)$对各属性$G_j(j=1,2,\cdots,6)$的满足程度均已知，用直觉模糊数d_{ij}表示，$d_{ij}=(\mu_{ij},\nu_{ij})$，$\mu_{ij}$表示方案$Y_i$满足属性$G_j$的程度，$\nu_{ij}$表示方案$Y_i$不满足属性$G_j$的程度，举例来讲，对于$d_{41}=(0.6,0.2)$，其含义是对于方案$(Y_4)$路基保温，冻害处的土质$(G_1)$适合路基保温这一方案的程度为0.6，不适合路基保温的程度为0.2。决策矩阵如表4所示。

表4　决策矩阵D表

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
Y_1	(0.2,0.4)	(0.6,0.2)	(0.4,0.2)	(0.7,0.1)	(0.3,0.5)	(0.5,0.2)
Y_2	(0.6,0.2)	(0.5,0.1)	(0.6,0.2)	(0.6,0.1)	(0.3,0.5)	(0.4,0.1)
Y_3	(0.4,0.3)	(0.7,0.1)	(0.5,0.3)	(0.6,0.1)	(0.4,0.3)	(0.3,0.1)
Y_4	(0.6,0.2)	(0.5,0.1)	(0.7,0.1)	(0.3,0.1)	(0.5,0.1)	(0.7,0.1)
Y_5	(0.5,0.3)	(0.3,0.3)	(0.6,0.1)	(0.6,0.1)	(0.6,0.2)	(0.5,0.2)

下面采用基于熵权法的决策方法综合各评估指标确定最佳方案：

步骤1　由题可得直觉模糊决策矩阵D，如表4所示；

步骤2　由式(12)计算各方案在各属性上的得分函数值，得得分函数矩阵S，见表5：

表5　得分函数矩阵S表

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
Y_1	0.13	0.69	0.49	0.84	0.06	0.599
Y_2	0.69	0.69	0.69	0.78	0.06	0.58
Y_3	0.43	0.84	0.54	0.78	0.43	0.44
Y_4	0.69	0.69	0.84	0.44	0.69	0.84
Y_5	0.54	0.30	0.78	0.78	0.69	0.599

归一化得表6的数值：

表6　归一化的得分函数矩阵$\tilde{S}$表

	G_1	G_2	G_3	G_4	G_5	G_6
Y_1	0.052	0.215	0.147	0.232	0.031	0.196
Y_2	0.278	0.215	0.207	0.215	0.031	0.190
Y_3	0.173	0.262	0.162	0.215	0.223	0.144
Y_4	0.278	0.215	0.251	0.122	0.358	0.275
Y_5	0.218	0.093	0.234	0.215	0.358	0.196

步骤3　根据式(16)计算各属性输出的平均信息熵：

$H_s(G_1)=0.9327, H_s(G_2)=0.9713,$

$H_s(G_3)=0.9877, H_s(G_4)=0.9861,$

$H_s(G_5)=0.7987, H_s(G_6)=0.9870$

步骤4　利用式(17)计算各属性G_j的权重系数可得：

$w_1=0.2, w_2=0.085, w_3=0.037,$

$w_4=0.041, w_5=0.598, w_6=0.039$

步骤5　计算每个方案的综合属性值：

$f(Y_1)=0.1965,\ f(Y_2)=0.3127,$

$f(Y_3)=0.2679,\ f(Y_4)=0.6912,$

$f(Y_5)=0.6303$

因此$Y_4>Y_5>Y_2>Y_3>Y_1$，可见方案Y_4为最优，即应该选择路基保温的冻害整治措施。实际中，选择路基保温的冻害整治措施之后的效果分析如表7所示，这也验证了这种基于改进得分函数的决策方法的有效性和实用性。

表7　整治效果对比分析表

项　目	单　位	整治前	整治后	减少比例%
冻害高度	毫米	60	14	76.7
补修次数(12月—次年4月)	次/月	18	7	61.1
垫板数量	立方米	2.5	0.64	74.4
人力投入	工人数/年	1 632	427	73.8
轨检车动态检查综合指标	平均扣分/次	42.8	8.3	80.6

六、结　论

本文分析了现有得分函数的不足之处，并综合考虑隶属度、非隶属度以及犹豫度提出了一个新的得分函数。在此基础上引入熵权法求得最优权重，然后通过比较各方案的加权综合属性值得出方案的优劣排序。该方法不需要决策者去寻找其他相关信息，为属性权重信息未知的直觉模糊多属性决策问题的解决提供了一条可行路径。实际的铁路冻害整治算例进一步说明该方法的可行性和有效性。本文提出的方法不需要决策者事先给出权重的信息，更加客观和可靠，易于在实际中推广和应用。

参考文献：

[1] Zadeh L A. Fuzzy Sets [J]. Information and Control, 1965, 8(3).

[2] Atanassov K T. Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. Fuzzy Sets and System, 1986, 20(1).

[3] Atanassov K T. More on Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. Fuzzy Sets and System, 1989, 33(1).

[4] Atanassov K T. New Operations Defined Over the Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. Fuzzy Sets and System, 1994, 61(2).

[5] Atanassov K T. Operators Over Interval-Valued Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. Fuzzy Sets and System, 1994, 64(2).

[6] Bustince H, Burillo P. Vague Sets are Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. Fuzzy Sets and System, 1996, 79(3).

[7] Papakostas G A, Hatzimichailidis A G, Kaburlasos V G. Distance and Similarity Measures Between Intuitionistic Fuzzy Sets: A Comparative Analysis From a Pattern Recognition Point of View [J/OL]. Pattern Recognition Letters, 2013, http://dx.doi.org/10.1016/j.patrec.2013.05.015.

[8] Eulalia Szmidt, Janusz Kacprzyk, Pawel Bujnowski. How to Measure the Amount of Knowledge Conveyed by Atanassov's Intuitionistic Fuzzy Sets [J/OL]. Information Sciences, 2013, http://dx.doi.org/10.1016/j.ins.2012.12.046.

[9] 王坚强，张忠. 基于直觉梯形模糊数的信息不完全确定的多准则决策方法 [J]. 控制与决策，2009，24(2).

[10] Hua-Wen Liu , Guo-Jun Wang. Multi-Criteria Decision-Making Methods Based on Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. European Journal of Operational Research, 2007, 179(1).

[11] Liang-Hsuan Chen, Chia-Chang Hung, Chien-Cheng Tu. Considering the Decision Maker's Attitudinal Character to Solve Mult-Criteria Decision-Making Problems in an Intuitionistic Fuzzy Environment [J]. Knowledge-Based Systems, 2012, 36.

[12] Liu J, Liu S F, Liu P, et al. A New Decision Support Model in Multi-Criteria Decision Making With Intuitionistic Fuzzy Sets Based on Risk Preferences and Criteria Reduction [J]. Journal of the Operational Research Society, 2013, 64.

[13] Xu Z S. Intuitionistic Fuzzy Aggregation Operators [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2007, 15(6).

[14] Jue Wang, Jie Zhang, San-Yang Liu. A New Score Function for Fuzzy MCDM Based on Vague Set Theory [J]. International Journal of Computational Cognition, 2006, 4(1).

[15] Zhi Pei, Li Zheng. A Novel Approach to Multi-Attribute Decision Making Based on Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. Expert Systems with Applications, 2012, 39(3).

[16] Zhenhua Zhang, Jingyu Yang, Youpei Ye, Yong Hu, Qiansheng Zhang. A Type of Score Function on Intuitionistic Fuzzy Sets with Double Parameters and Its Application to Pattern Recognition and Medical Diagnosis [J]. Procedia Engineering, 2012, 29.

[17] Szmidt E, Kacprzyk J. Distances Between Intuitionistic Fuzzy Sets [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114(3).

[18] Chen S M, Tan J M. Handling Multicriteria Fuzzy Decision-making Problems Based on Vague Set Theory [J]. Fuzzy Sets and Systems, 1994, 67(2).

[19] Hong D H, Choi C H. Multicriteria Fuzzy Decision-Making Problems Based on Vague Set Theory [J]. Fuzzy Sets and Systems, 2000, 114(1).

Intuitionistic Fuzzy Multi-criteria Decision-making Approach Based on Prospect Score Function

WU Chong, LIU Qian, WAN Xiang-yu

(School of Management, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

Abstract: Intuitionistic fuzzy multi-criteria decision-making approach with unknown weight is investigated. A new score function is defined based on membership degree, non-membership degree and hesitancy degree. As for intuitionistic fuzzy multi-criteria decision-making problems in which criteria weights is unknown, an intuitionistic fuzzy multi-criteria decision-making approach is proposed based on the prospect score function and entropy-weighted method. Finally, an illustrative example is given to show the feasibility and effectiveness of this approach.

Key words: intuitionistic fuzzy set; multi-criteria decision-making; prospect score function; entropy-weighted method

（责任编辑:马　慧）