

一类悬挂碰撞振动系统的动力学分析*

张其武

(兰州交通大学机电工程学院,甘肃兰州 730070)

摘要:通过对一类悬挂碰撞振动系统的建模,选择一个碰撞界面作为 Poincaré 映射的截面,利用解析法证明了悬挂碰撞振动系统在适当参数下发生分岔与混沌的现象。对该系统分岔与混沌行为的研究,为工程实际中含间隙机械系统的优化设计提供了依据。

关键词:含间隙系统; Poincaré 映射; 分岔; 混沌

中图分类号: TH113.1

文献标志码: A

文章编号: 1007-4414(2013)01-0018-03

Dynamic analysis of a suspension and vibro-impact system

Zhang Qi-wu

(School of mechanical and electrical engineering, Lanzhou Jiaotong university, Lanzhou Gansu 730070, China)

Abstract: A suspension and vibro-impact system with the mechanical model is considered in this paper. Motion differential equation of the system is derived and Poincaré map is established numerically. Bifurcations and chaos of the system are investigated by analytical method. The phenomenon of bifurcation and chaos in the proper parameters of the system are analyzed. It is proved that some routes to chaos in the suspension and vibro-impact system are non-typical. It is possible to optimize the parameters of practical system by investigation of bifurcation and chaos.

Key words: system with clearance; Poincaré map; bifurcation; chaos

1 引言

机械动力系统的冲击振动通常是由内部或边界上的间隙产生,即在零部件间或零部件与边界间的往复碰撞冲击。对于这类含间隙系统^[1-3]的理论研究已引起国内外学者的普遍关注。文献[4]研究了碰撞振动系统 Jacobian 矩阵有两个-1 特征值时的余维二分岔,发现了周期 1、2 点的 Hopf 分岔现象,数值仿真揭示了概周期运动经有限次环面倍化与伴随锁相过渡到混沌响应的全局动力学行为。文献[5]分析了一类两自由度碰撞振动系统存在周期倍化分岔和 Hopf 分岔,并简明地讨论了系统通向混沌的道路。文献[6]研究了一类三自由度含间隙系统的周期分岔和权式分岔向混沌演化路径。

笔者建立了悬挂碰撞振动系统的力学模型和 Poincaré 映射,通过对系统周期运动的解析解的求解,数值模拟了系统 Hopf 分岔和混沌的发展演化过程。

2 力学模型及微分方程

图 1 是一个两自由度振动系统与固定约束发生碰撞的力学模型。质量为 M_1 和 M_2 的质块分别由刚度为 K_1 、 K_2 和 K_3 的线性弹簧和阻尼系数为 C_1 、 C_2 和 C_3 的线性阻尼器连接与支承,两个质块只作水平运动,并分别受到简谐激振力 $P_i = \sin(\Omega T + \tau)$ ($i=1, 2$)

的作用。当质块 M_1 的位移 $X_1(t)$ 等于间隙 B 时,质块 M_1 将于刚性约束 A 发生碰撞,改变速度方向后,又以新的初值运动,然后再与约束 A 碰撞,如此反复。假设力学模型中的阻尼是 Rayleigh 型比例阻尼,碰撞过程由碰撞恢复系数 R 确定,碰撞持续时间略去不计。

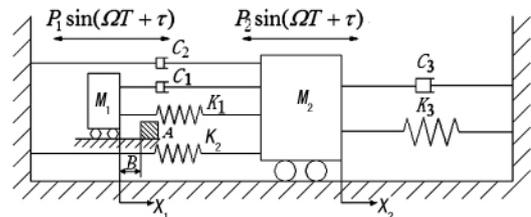


图 1 悬挂碰撞振动系统模型图

相邻两次碰撞之间($|X_1| < B$) ,振动系统的无量纲运动微分方程为:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mu_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\xi & -2\xi \\ -2\xi & 2\xi(1 + \mu_{c2} + \mu_{c3}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 + \mu_{k2} + \mu_{k3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 - f_{20} \\ f_{20} \end{Bmatrix} \sin(\omega T + \tau) \quad (1)$$

* 收稿日期:2013-01-02

作者简介:张其武(1986-)男,甘肃会宁人,在读硕士,研究方向:车辆工程、非线性系统动力学。

质块 M_1 的冲击方程为:

$$\dot{x}_{1+} = -R\dot{x}_{1-} \quad (x_1 = b) \quad (2)$$

在式 (1)、(2) 中, “ \ddot{x}_i ” ($i=1, 2$) 表示振子 M_i 的位移 x_i 对无量纲时间 t 求二阶导数, “ \dot{x}_i ” 表示振子 M_i 的位移 x_i 对无量纲时间 t 求一阶导数; $\dot{x}_{1-}, \dot{x}_{1+}$ 分别表示质块 M_1 与约束 A 碰撞前后的瞬时速度; 设 $M_1 \neq 0, K_1 \neq 0, C_1 \neq 0$, 其中无量纲量为:

$$\begin{aligned} \mu_m &= \frac{M_2}{M_1}, \mu_{k2} = \frac{K_2}{K_1}, \mu_{k3} = \frac{K_3}{K_1} \\ \mu_{c2} &= \frac{C_2}{C_1}, \mu_{c3} = \frac{C_3}{C_1}, \mu_{k2} = \mu_{c2} \\ \mu_{k3} &= \mu_{c3}, t = T \sqrt{\frac{K_1}{M_1}}, \omega = \Omega \sqrt{\frac{M_1}{K_1}} \\ \xi &= \frac{C_1}{2\sqrt{K_1 M_1}}, f_{20} = \frac{P_2}{P_1 + P_2} \\ b &= \frac{BK_1}{P_1 + P_2}, x_i = \frac{X_i K_1}{P_1 + P_2} \quad (i=1, 2) \end{aligned} \quad (3)$$

令 ψ 表示方程 (1) 的正则模态矩阵, ω_1 和 ω_2 表示在无碰撞情况下振动系统的固有频率。取 ψ 为变换矩阵, 做如下的坐标变换:

$$X = \psi \xi \quad (4)$$

将方程解耦为:

$$I\ddot{\xi} + C\dot{\xi} + \Lambda\xi = \bar{F}\sin(\omega t + \tau) \quad (5)$$

式中: $X = (x_1, x_2)^T$; $\xi = (\xi_1, \xi_2)^T$; I 是一个 2×2 阶单位矩阵, C 和 Λ 是 2×2 阶对角矩阵, $C = \text{diag}[2\xi\omega_1^2, 2\xi\omega_2^2]$; $\Lambda = \text{diag}[\omega_1^2, \omega_2^2]$; $\bar{F} = (\bar{f}_1, \bar{f}_2)^T = \psi^T P_k, P_k = (1 - f_{20}, f_{20})^T$ 。通过模态叠加法可以得到方程 (1) 的解。方程 (1) 的通解为:

$$x_i(t) = \sum_{j=1}^2 \psi_{ij} [e^{-\eta_j t} (a_j \cos \omega_{dj} t + b_j \sin \omega_{dj} t) + A_j \sin(\omega t + \tau) + B_j \cos(\omega t + \tau)] \quad (6)$$

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^2 \psi_{ij} \{ e^{-\eta_j t} [(b_j \omega_{dj} - \eta_j a_j) \cos \omega_{dj} t - (\eta_j b_j + a_j \omega_{dj}) \sin \omega_{dj} t] + A_j \omega \cos(\omega t + \tau) - B_j \omega \sin(\omega t + \tau) \} \quad (i=1, 2) \quad (7)$$

式中: ψ_{ij} 是正则模态矩阵 ψ 的元素; $\eta_j = \xi \omega_{nj}^2$; $\omega_{dj} = \sqrt{\omega_{nj}^2 - \eta_j^2}$; a_j 和 b_j 是积分常数, 由振动系统的初始条件和模态参数确定; A_j 和 B_j 为振幅常数, 且:

$$A_j = \frac{\omega_{dj}^2 + \eta_j^2 - \omega^2}{(\omega_{dj}^2 + \eta_j^2 - \omega^2)^2 + 4\eta_j^2 \omega^2} \bar{f}_j \quad (8)$$

$$B_j = \frac{-2\eta_j \omega}{(\omega_{dj}^2 + \eta_j^2 - \omega^2)^2 + 4\eta_j^2 \omega^2} \bar{f}_j \quad (9)$$

用 $q=p/n$ 表示图 1 碰撞振动系统的周期运动; n

表示力周期数; p 表示碰撞振子 M_1 与左右约束 A 的碰撞次数。取 $\theta = \omega t$, 选择 Poincaré 截面:

$$\sigma = \left\{ \begin{aligned} &(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \theta) \in R^4 \times S^1 \\ &x = b, \dot{x}_{1+} = x_1 \end{aligned} \right\}$$

构造悬挂碰撞振动系统的 Poincaré 映射:

$$X' = f(u, X) \quad (10)$$

式中: u 为实数 $\mu \in R^1$ 。

$$\begin{aligned} X &= (\dot{x}_{1+}, \dot{x}_2, x_2, \tau)^T \\ X' &= (\dot{x}_{1+}', \dot{x}_2', x_2', \tau')^T \end{aligned} \quad (11)$$

3 系统周期运动的分岔及混沌演化

选取悬挂碰撞振动系统的一组参数: $\xi = 0.0, \mu_m = 3.043728, \mu_{k2} = 1.000008, \mu_{k3} = 1.0, f_{20} = 0.0, R = 0.8, b = 2.4$ 。特征值如图 2 所示, 当 $\omega = 0.52079$ 时, Jacobi 矩阵的一对共轭特征值穿越单位圆周, 剩下的特征值滞留于单位圆内, 满足 Hopf 分岔条件。

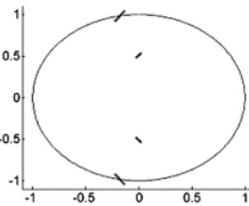


图 2 特征值图

图 3 为投影的 Poincaré 映射图。

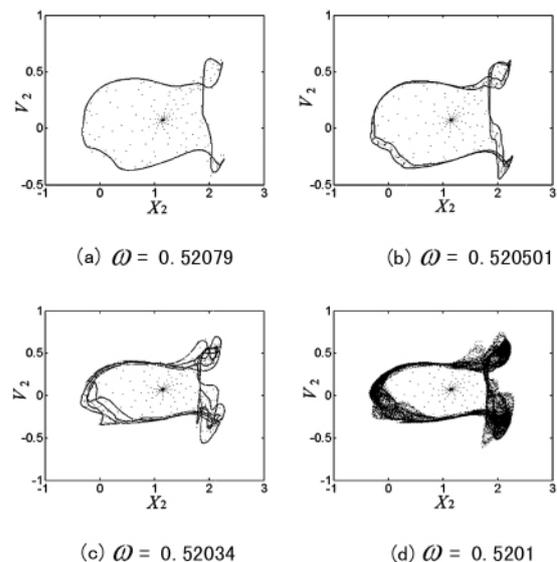


图 3 投影的 Poincaré 映射图

取 $\sigma = \{(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \theta) \in R^4 \times S^1 | x_1 = b\}$ 作为 Poincaré 截面, 当 $\omega < \omega_c = 0.52079$ 时系统具有稳定的 $q=1/1$ 周期运动, 在 Poincaré 截面上生成 1 个 $q=1/1$ 不动点; 当 $\omega = 0.52079$ 时, 稳定的 $q=1/1$ 周期运动失稳发生 Hopf 分岔, 在 Poincaré 截面上形成 1 个周

期 $q=1/1$ 的吸引不变圈,如图3(a);分岔参数 ω 继续减小,系统发生倍化分岔,在 Poincaré 截面图上形成两个 $q=1/1$ 吸引不变环,如图3(b);参数 ω 再次减小,系统再次发生倍化分岔,在 Poincaré 截面上形成4个 $q=1/1$ 吸引不变环,如图3(c);参数 ω 继续减小,进入混沌运动,如图3(d)。

选取悬挂碰撞振动系统的一组参数: $\mu_m=6.4$ $\xi=0.0$ $\mu_{k2}=2.0$ $\mu_{k3}=2.0$ $f_{20}=0.0$ $R=0.8$ $b=3.6$ 。特征值图4所示,当 $\omega_c=0.66826$ 时, Jacobi 矩阵的一对共轭特征值横截单位圆周,剩下的特征值滞留于单位圆内,满足 Hopf 分岔条件。

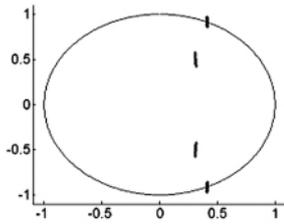


图4 特征值图

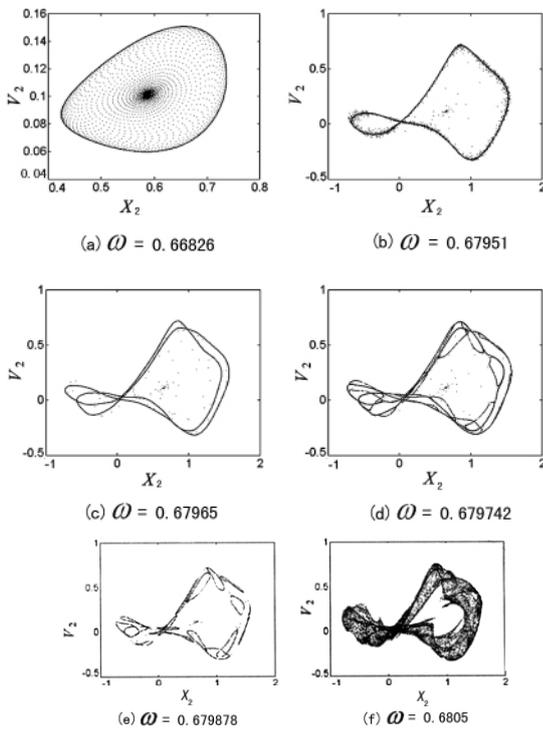


图5 投影的 Poincaré 映射图

取 $\sigma = \{(x_1, \dot{x}_1, x_2, \dot{x}_2, \theta) \in R^4 \times Sx_1 = b\}$ 作为 Poincaré 截面,当 $\omega > \omega_c = 0.66826$ 时系统具有稳定的 $q=1/1$ 周期运动,在 Poincaré 截面上生成1个 $q=1/1$ 不动点;当 $\omega = 0.66826$ 时,稳定的 $q=1/1$ 周期运动失稳发生 Hopf 分岔,在 Poincaré 截面上形成1个周期 $q=1/1$ 的吸引不变圈,如图5(a);随着激励频率 ω 递增, $q=1/1$ 吸引不变圈开始失稳,吸引不变圈发生变形,如图5(b);当激励频率 ω 递增, $q=1/1$ 吸引不变圈开始失稳,发生环面倍化分岔,生成2个 $q=1/1$ 吸引不变圈,如图5(c);当激励频率 $\omega = 0.679742$ 时, $q=1/1$ 吸引不变圈失稳,发生二次环面倍化分岔,形成4个 $q=1/1$ 吸引不变圈,如图5(d);当激励频率 ω 不断递增,系统最终进入混沌运动,如图5(e)和(f)。

4 结论

(1) 选择合理的系统参数,通过解析法,证明悬挂碰撞振动系统中存在 Hopf 分岔。

(2) 在悬挂碰撞振动系统中,由于间隙的存在,系统的动力学特性有了本质的变化。含间隙约束系统的稳态非线性解一般具有多值性,即对于相同参数下的同一个激励频率,将可能有多个稳态解存在。

(3) 悬挂碰撞振动系统的混沌控制最好参照论文所提供的轨道,使设备工作在最佳状态。

参考文献:

- [1] 李万祥,牛卫中. 一类含间隙系统的分岔与混沌的形成过程[J]. 振动与冲击,2005,24(3): 47-50.
- [2] Ding W C, Xie J H. Interaction of hopf and period doubling bifurcations of a vibro-impact system [J]. Journal of sound vibration, 2004, 275(1): 27-45.
- [3] 周伟,褚衍东,俞建宁,等. 一类两自由度含间隙系统的 Hopf 分岔[J]. 动力学与控制学报,2008,6(3): 235-238.
- [4] Wen G L. Codimension-2 hopf bifurcation of a two-degree-of-freedom vibro-impact system [J]. Journal of sound and vibration, 2001, 242(3): 475-485.
- [5] 乐源,谢建华,丁旺才. 一类两自由度碰撞振动系统的 Hopf 分岔和混沌[J]. 动力学与控制学报,2004,2(3): 36-41.
- [6] 张永燕. 一类三自由度含间隙系统的动力学分析[J]. 机械研究与应用,2012,6(1): 1-3.

· 信息 ·

充气高压开关外壳国家标准发布实施

GB/T28819-2012《充气高压开关设备用铝合金外壳》国家标准,经国家质量监督检验检疫总局、国家标准化管理委员会批准,于2012年11月5日正式发布,自2013年2月1日起实施。该标准是继《额定电压72.5kV及以上刚性气体绝缘输电线路》之后,平高集团起草并发布实施的第二个国家标准。该标准的发布和实施,将对高压开关设备外壳的设计、制造、试验及检验等方面提供强有力的技术依据,对高压开关装备制造行业降低成本,提高效率具有的深远意义。

• 本刊辑 •