0254-6124/2013/33(1)-085-07 *Chin. J. Space Sci.* 空间科学学报

Du Jiyong, Zhang Fengming, Li Jianwen, Huang Guorong, Dai Feng. Improved equivalent rotation vector based attitude updating algorithm of strapdown inertial navigation system under highly dynamic environment. *Chin. J. Space Sci.*, 2013, **33**(1): 85-91

高动态环境下 SINS 姿态更新的改进等效旋转矢量算法*

杜继永[1] 张凤鸣[1,2] 李建文[3] 黄国荣[2] 代 峰[4]

1(空军工程大学装备管理与安全工程学院 西安 710051)

2(空军工程大学航空航天工程学院 西安 710038)

3(中国人民解放军 95961 部队 北京 100195)

4(中国人民解放军驻 212 厂军事代表室 宝鸡 721000)

摘 要 高动态环境下捷联惯导系统的姿态算法是提高系统精度的关键技术. 通过研究 SINS 高动态姿态更新方法, 分析姿态矩阵解算的四元数及等效旋转矢量算法, 使等效旋转矢量算法在高动态环境下的应用问题得以完善. 为改善等效旋转矢量算法对于高动态飞行环境的适应性, 以圆锥运动作为环境条件, 对等效旋转矢量算法进行改进, 推导改进算法的误差. 通过与单子样和三子样等效旋转矢量算法进行仿真对比, 验证了改进算法的有效性.

关键词 高动态, 捷联惯导系统, 姿态更新, 圆锥误差, 等效旋转矢量

中图分类号 V 249.322

Improved Equivalent Rotation Vector Based Attitude Updating Algorithm of Strapdown Inertial Navigation System Under Highly Dynamic Environment

DU Jiyong[1] ZHANG Fengming[1,2] LI Jianwen[3]

HUANG Guorong[2] DAI Feng[4]

1(*Materiel Management and Safety Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an* 710051)

2(*Aeronautics and Astronautics Engineering College, Air Force Engineering University, Xi'an* 710038)

3(*Unit 95961 of PLA, Beijing* 100195)

4(*Representative of the PLA Military 212 Plant Room, Baoji* 721000)

Abstract The navigation algorithm of Strapdown Inertial Navigation System (SINS) under highly dynamic environment is studied, which is the key technology to improve the accuracy of SINS. The

* 国家自然科学基金项目资助 (60304004)

2011-11-14 收到原稿, 2012-09-17 收到修定稿

E-mail: dujiyong_86@163.com

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

quaternion and equivalent rotation vector algorithms of resolving the attitude matrix were analyzed, and the equivalent rotation vector algorithm was developed in view of the application problem under highly dynamic environment. Aiming at adapting the algorithm to the application in highly dynamic flight environment, an improved equivalent rotation vector algorithm was proposed on the basis of coning motion environment, and the calculation error was derived. The performance was compared to one-sample and three-sample rotation vector algorithms. Simulation results indicate the effectiveness of the improved algorithm.

Key words Highly dynamic, Strapdown Inertial Navigation System (SINS), Attitude updating, Coning error, Equivalent rotation vector

0 引言

捷联式惯性导航系统 (Strapdown Inertial Navigation System, SINS) 数据处理的关键是载体姿态、速度、位置参数的实时解算. 在静态或低动态环境下, 姿态参数的解算多采用四元数法 [1], 当载体处于高动态机动环境时, 因转动矢量直接积分而引入的不可交换误差将迅速增大. 为减小不可交换误差, 1971 年 Bortz 提出等效旋转矢量概念, 其后的研究主要集中在旋转矢量求解上 [2−4]. 文献 [3] 分析了典型圆锥环境中四元数算法的圆锥误差; 文献 [4] 对高动态环境下四元数的四阶–龙格库塔法和三子样旋转矢量法进行比较, 验证了等效旋转矢量法可提高高动态环境下的导航精度.

本文从 SINS 基本原理出发, 研究适于高动态飞行环境的 SINS 姿态更新算法. 以圆锥运动作为环境条件, 通过改进等效旋转矢量算法, 增强其对极端飞行环境的适应性, 并通过对比仿真验证了算法的性能.

1 基于等效旋转矢量的姿态四元数计算

设 t_{k-1} 时刻从地理系 (N 系) 到机体系 (B 系) 的旋转四元数为 $\boldsymbol{q}(t_{k-1})$, t_k 时刻从 N 系到 B 系的旋转四元数为 $\boldsymbol{q}(t_k)$, N 系从 t_{k-1} 时刻到 t_k 时刻的旋转四元数为 $\boldsymbol{q}_{\rm n}(T_{\rm a})$, $T_{\rm a}=t_k-t_{k-1}$, B 系从 t_{k-1} 时刻到 t_k 时刻的旋转四元数为 $\boldsymbol{q}_{\rm b}(T_{\rm a})$. $\boldsymbol{q}(t_{k-1})$ 及 $\boldsymbol{q}(t_k)$ 即为姿态四元数, $\boldsymbol{q}_{\rm b}(T_{\rm a})$ 即为姿态变化四元数. 根据矢量坐标变换的四元数表示法及变换矩阵表示法的等价关系, 可得 [6]

$$\boldsymbol{q}(t_k)=\boldsymbol{q}_n^*(T_{\rm a})\circ\boldsymbol{q}(t_{k-1})\circ\boldsymbol{q}_{\rm b}(T_{\rm a}). \tag{1}$$

式 (1) 中, 符号 $\circ$ 表示四元数乘法.

对于任一标量 a 及两个不同的四元数

$$\boldsymbol{q}^{(1)}=(q_0^{(1)},\boldsymbol{q}_{\rm v}^{(1)}),$$
$$\boldsymbol{q}^{(2)}=(q_0^{(2)},\boldsymbol{q}_{\rm v}^{(2)}),$$

有如下加法和乘法定义:

$$a\boldsymbol{q}=(q_0,\boldsymbol{q}_{\rm v}),$$
$$\boldsymbol{q}^{(1)}+\boldsymbol{q}^{(2)}=(q_0^{(1)}+q_0^{(2)},\ \boldsymbol{q}_{\rm v}^{(1)}+\boldsymbol{q}_{\rm v}^{(2)}),$$
$$\boldsymbol{q}^{(1)}\circ\boldsymbol{q}^{(2)}=(q_0^{(1)}q_0^{(2)}-\boldsymbol{q}_{\rm v}^{(1)}\cdot\boldsymbol{q}_{\rm v}^{(2)},q_0^{(1)}\boldsymbol{q}_{\rm v}^{(2)}+q_0^{(2)}\boldsymbol{q}_{\rm v}^{(1)}+\boldsymbol{q}_{\rm v}^{(1)}\times\boldsymbol{q}_{\rm v}^{(2)}).$$

记 N 系从 t_{k-1} 时刻到 t_k 时刻角位置变化对应的等效旋转矢量为 $\boldsymbol{\Phi}_{\rm n}$, 则有

$$\boldsymbol{\Phi}_n\approx\int_{t_{k-1}}^{t_k}\boldsymbol{\omega}_{\rm in}^{\rm n}(t){\rm d}t. \tag{2}$$

其中, $\boldsymbol{\omega}_{\rm in}^{\rm n}(t)$ 表示 t 时刻 N 系相对于惯性坐标系 (I 系) 的转动角速度在 N 系下的投影矢量. 将时间间隔 $[t_{k-1},t_k]$ 分为三等份, 则式 (2) 可进一步表示为

$$\boldsymbol{\Phi}_{\rm n}\approx\sum_{i=1}^{3}\int_{t_{k-1}+\frac{(i-1)T_{\rm a}}{3}}^{t_{k-1}+\frac{iT_{\rm a}}{3}}\boldsymbol{\omega}_{\rm in}^{{\rm n}(i)}(t){\rm d}t. \tag{3}$$

其中, $\boldsymbol{\omega}_{\rm in}^{{\rm n}(i)}$ 为第 i $(i=1,2,3)$ 个均分间隔

$$[t_{k-1}+(i-1)T_{\rm a}/3,t_{k-1}+iT_{\rm a}/3]$$

所对应的 $\boldsymbol{\omega}_{\rm in}^{\rm n}$ 值.

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

在解算得到等效旋转矢量 $\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{n}}$ 后, 可按下式计算旋转四元数 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{n}}(T_{\mathrm{a}})$, 即

$$\boldsymbol{q}_{\mathrm{n}}(T_{\mathrm{a}})=\cos\frac{\|\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{n}}\|}{2}+\frac{\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{n}}}{\|\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{n}}\|}\sin\frac{\|\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{n}}\|}{2}. \tag{4}$$

记 B 系从 t_{k-1} 时刻到 t_k 时刻角位置变化所对应的等效旋转矢量为 $\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{b}}$, 则其微分方程为 [9]

$$\dot{\boldsymbol{\Phi}}_{\mathrm{b}}=\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}+\frac{1}{2}\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{b}}\times\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}+\frac{1}{\|\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{b}}\|^2}\cdot\left[1-\frac{\|\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{b}}\|\sin\|\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{b}}\|}{2(1-\cos\|\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{b}}\|)}\right]\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{b}}\times(\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{b}}\times\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}). \tag{5}$$

根据对载体角速度矢量 $\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}$ 的不同拟合阶数, 旋转矢量微分方程式 (5) 的解算可分为单子样及多子样 (例如二子样、三子样等) 旋转矢量法, 以 N_{s} ($N_{\mathrm{s}}=1,2,3,\cdots$) 子样等效旋转矢量法为例, 令

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_r=\int_{(r-1)T_{\mathrm{a}}/N_{\mathrm{s}}}^{rT_{\mathrm{a}}/N_{\mathrm{s}}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}(t_{k-1}+\tau)\mathrm{d}\tau,\quad r=1,2,\cdots,N_{\mathrm{s}}. \tag{6}$$

则 $\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{b}}$ 的等效旋转矢量法计算结果为

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\mathrm{b}}=\sum_{r=1}^{N_s}(\Delta\boldsymbol{\theta}_r)+\sum_{r_1=1}^{N_{\mathrm{s}}-1}\sum_{r_2>r_1}^{N_{\mathrm{s}}}(C_{r_1,r_2}^{\theta}\Delta\boldsymbol{\theta}_{r_1}\times\Delta\boldsymbol{\theta}_{r_2}). \tag{7}$$

根据 $\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{b}}$ 即可解算出姿态变化四元数

$$\boldsymbol{q}_{\mathrm{b}}(T_{\mathrm{a}})=\cos\frac{\|\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{b}}\|}{2}+\frac{\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{b}}}{\|\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{b}}\|}\sin\frac{\|\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{b}}\|}{2}. \tag{8}$$

将解算所得的 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{b}}(T_{\mathrm{a}})$ 及 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{n}}(T_{\mathrm{a}})$ 代入式 (1), 即可对姿态四元数 $\boldsymbol{q}(t_k)$ 进行更新. 为了在计算效率与计算精度间寻求平衡, 将 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{b}}(T_{\mathrm{a}})$ 及 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{n}}(T_{\mathrm{a}})$ 以较高频率进行计算, 姿态四元数 $\boldsymbol{q}(t_k)$ 则以较低频率进行更新.

2 等效旋转矢量算法改进

2.1 圆锥运动描述

在刚体转动理论中, 当刚体在两正交轴方向具有频率相同的角振动速率时, 第三个正交轴在空间将绕其平均位置做锥面或近似锥面运动, 该运动称为刚体的圆锥运动.

对 SINS 姿态更新而言, 圆锥运动是一种极端的工作环境条件 [5], 会诱发数学平台的严重漂移. 研究表明 [2,7], 对于非互易矢量, 其在典型圆锥运动情形下会达到最大值, 即典型圆锥运动会对 SINS 姿态解算产生最大影响, 因此, 对等效旋转矢量算法进行改进时常以圆锥运动作为环境条件. 如果能确保圆锥运动环境下的算法漂移最小, 也就能确保其余环境条件下的算法漂移最小.

对于典型圆锥运动, 其旋转矢量 [2]

$$\boldsymbol{\Phi}_{\mathrm{w}}=[0\quad a_{\mathrm{w}}\cos(\Omega_{\mathrm{w}}t)\quad a_{\mathrm{w}}\sin(\Omega_{\mathrm{w}}t)]^{\mathrm{T}}. \tag{9}$$

其中, a_{w} 为圆锥运动幅度; Ω_{w} 为圆锥运动角速率. 圆锥运动的物理描述为: 当 y, z 轴方上分别有角振动 $a_{\mathrm{w}}\cos(\Omega_{\mathrm{w}}t)$ 和 $a_{\mathrm{w}}\sin(\Omega_{\mathrm{w}}t)$ 而 x 轴方向无输入时, 在 x 轴上将出现平均值为 $a_{\mathrm{w}}^2/2$ 的姿态角速度输出. 如果陀螺对该角速度敏感就会形成姿态误差.

由式 (9) 可知, B 系与 N 系之间的旋转四元数

$$\boldsymbol{q}(t)=[\cos\mathcal{A}\quad 0\quad \sin\mathcal{A}\cos\mathcal{B}\quad \sin\mathcal{A}\sin\mathcal{B}]^{\mathrm{T}}. \tag{10}$$

其中, $\mathcal{A}=a_{\mathrm{w}}/2$, $\mathcal{B}=\Omega_{\mathrm{w}}t$, 则典型圆锥运动的角速度为

$$\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}(t)=2\boldsymbol{q}^{-1}(t)\circ\dot{\boldsymbol{q}}(t)=\begin{bmatrix}-2\Omega_{\mathrm{w}}\sin^2\mathcal{A}\\-\Omega_{\mathrm{w}}\sin(2\mathcal{A})\sin\mathcal{B}\\\Omega_{\mathrm{w}}\sin(2\mathcal{A})\cos\mathcal{B}\end{bmatrix}. \tag{11}$$

2.2 等效旋转矢量的改进

假设每次更新间隔内取 N_{s} 次陀螺角位移矢量的采样值, 则由式 (6) 和式 (11) 可以得到更新间隔 $[t_{k-1},t_k]$ 内第 r 次的采样值, 即

$$\Delta\boldsymbol{\theta}_r=\int_{(r-1)T_{\mathrm{a}}/N_{\mathrm{s}}}^{rT_{\mathrm{a}}/N_{\mathrm{s}}}\boldsymbol{\omega}_{\mathrm{nb}}^{\mathrm{b}}(t_{k-1}+\tau)\mathrm{d}\tau=\begin{bmatrix}-\frac{2}{N_{\mathrm{s}}}(\Omega_{\mathrm{w}}T_{\mathrm{a}})\sin^2\left(\frac{a_{\mathrm{w}}}{2}\right)\\-2\sin a_{\mathrm{w}}\sin\left(\frac{\Omega_{\mathrm{w}}T_{\mathrm{a}}}{2N_{\mathrm{s}}}\right)\sin\left[\Omega_{\mathrm{w}}\left(t_{k-1}+\frac{2r-1}{2N_{\mathrm{s}}}T_{\mathrm{a}}\right)\right]\\2\sin a_{\mathrm{w}}\sin\left(\frac{\Omega_{\mathrm{w}}T_{\mathrm{a}}}{2N_{\mathrm{s}}}\right)\cos\left[\Omega_{\mathrm{w}}\left(t_{k-1}+\frac{2r-1}{2N_{\mathrm{s}}}T_{\mathrm{a}}\right)\right]\end{bmatrix},\quad r=1,2,\cdots,N_{\mathrm{s}}. \tag{12}$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

令更新间隔 $[t_{k-1},t_k]$ 内总的角位移输出矢量为 $\Delta\boldsymbol{\theta}$, 则有

$$\Delta\boldsymbol{\theta}=\sum_{r=1}^{N_s}\Delta\boldsymbol{\theta}_r=\begin{bmatrix}-2\Omega_w T_a\sin^2(a_w/2)\\-2\sin a_w\sin(\Omega_w T_a/2)\sin[\Omega_w(t_{k-1}+T_a/2)]\\2\sin a_w\sin(\Omega_w T_a/2)\cos[\Omega_w(t_{k-1}+T_a/2)]\end{bmatrix}. \tag{13}$$

同理, 在更新间隔 $[t_{k-2},t_{k-1}]$ 内总的角位移输出

$$\Delta\boldsymbol{\theta}'=\begin{bmatrix}-2\Omega_w T_a\sin^2(a_w/2)\\-2\sin a_w\sin(\Omega_w T_a/2)\sin[\Omega_w(t_{k-2}+T_a/2)]\\2\sin a_w\sin(\Omega_w T_a/2)\cos[\Omega_w(t_{k-2}+T_a/2)]\end{bmatrix}. \tag{14}$$

由式 (7) 可知, 通过增加陀螺的采样次数 N_s 可以得到所需精度的估计旋转矢量 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_b$, 但会增加计算时间和存储负担. 由于前一周期的角位移输出 $\Delta\boldsymbol{\theta}'$ 是已知的, 故利用 $\Delta\boldsymbol{\theta}'$ 可得到改进算法 [9], 即

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_b=\begin{bmatrix}\hat{\Phi}_{b,x}\\\hat{\Phi}_{b,y}\\\hat{\Phi}_{b,z}\end{bmatrix}=\Delta\boldsymbol{\theta}+\sum_{r_1=1}^{N_s-1}\sum_{r_2>r_1}^{N_s}(C^{\theta}_{r_1,r_2}\Delta\boldsymbol{\theta}_{r_1}\times\Delta\boldsymbol{\theta}_{r_2})+G_b\Delta\boldsymbol{\theta}'\times\Delta\boldsymbol{\theta}. \tag{15}$$

其中, G_b 为待定的常值. $\Delta\boldsymbol{\theta}_r$, $\Delta\boldsymbol{\theta}$ 及 $\Delta\boldsymbol{\theta}'$ 分别由式 (12)~(14) 计算.

由式 (11) 可知, 沿着圆锥运动的三个轴只有一个轴上误差的均值不为零, 因此, 将 $\boldsymbol{\Phi}_b$ 的误差定义为 $\boldsymbol{\Phi}_b$ 真实值与计算值 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_b$ 的非零均值项之差, 即有

$$\delta\Phi_b=\Phi_{b,x}-\hat{\Phi}_{b,x}. \tag{16}$$

其中, $\delta\Phi_b$ 为 $\boldsymbol{\Phi}_b$ 的非零均值项误差, $\Phi_{b,x}$, $\hat{\Phi}_{b,x}$ 分别为 $\boldsymbol{\Phi}_b$ 及 $\hat{\boldsymbol{\Phi}}_b$ 的 x 轴分量.

由四元数的定义可知, B 系从 t_{k-1} 时刻到 t_k 时刻的旋转四元数 $\boldsymbol{q}_b(T_a)$ 可表示为

$$\boldsymbol{q}_b(T_a)=[\,C_b\quad S\Phi_{b,x}\quad S\Phi_{b,y}\quad S\Phi_{b,z}\,]^{\mathrm{T}}. \tag{17}$$

其中, $\Phi_{b,y}$ 及 $\Phi_{b,z}$ 分别为旋转矢量 $\boldsymbol{\Phi}_b$ 的 y,z 轴投影分量;

$$C_b=\cos(\|\boldsymbol{\Phi}_b\|/2),$$
$$S=(1/\|\boldsymbol{\Phi}_b\|)\sin(\|\boldsymbol{\Phi}_b\|/2).$$

忽略二阶及以上的高阶小量, 有

$$S=1/2,\quad q_{b,1}=\Phi_{b,x}/2.$$

故 $\delta\Phi_b$ 可进一步表示为

$$\delta\Phi_b=2q_{b,1}-\hat{\Phi}_{b,x}. \tag{18}$$

在圆锥运动环境下暂不考虑旋转四元数 $\boldsymbol{q}_n(T_a)$ 的作用. 根据式 (10), 对 $\boldsymbol{q}_b(T_a)$ 作如下近似:

$$\boldsymbol{q}_b(T_a)=\boldsymbol{q}^*(t_{k-1})\circ\boldsymbol{q}_n(T_a)\circ\boldsymbol{q}(t_k)\approx\boldsymbol{q}^*(t_{k-1})\circ\boldsymbol{q}(t_k)=\begin{bmatrix}1-2\sin^2(a_w/2)\sin^2(\Omega_w T_a/2)\\-\sin^2(a_w/2)\sin(\Omega_w T_a)\\-\sin(a_w)\sin(\Omega_w T_a/2)\sin[\Omega_w(t_{k-1}+T_a/2)]\\\sin(a_w)\sin(\Omega_w T_a/2)\cos[\Omega_w(t_{k-1}+T_a/2)]\end{bmatrix}. \tag{19}$$

将式 (19) 与式 (15) 中的 $\boldsymbol{q}_{b,1}(T_a)$ 及 $\hat{\Phi}_{b,x}$ 代入式 (18), 并令

$$\sin^2(a_w/2)=a_w^2/4,$$

则可得改进算法误差为

$$\delta\Phi_b=\frac{1}{2}a_w^2\Big\{\Omega_w T_a-\sum_{r_1=1}^{N_s-1}\sum_{r_2>r_1}^{N_s}\Big[8C^{\theta}_{r_1,r_2}\cdot\sin^2\Big(\frac{\Omega_w T_a}{2N_s}\Big)\sin\Big(\frac{r_2-r_1}{N_s}\Omega_w T_a\Big)\Big]-\sin(\Omega_w T_a)-8G_b\sin^2\Big(\frac{\Omega_w T_a}{2}\Big)\sin(\Omega_w T_a)\Big\}. \tag{20}$$

具体来说, 当 $N_s=3$ 时, 可得改进的三子样等效旋转矢量算法及其误差, 有

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_b=\Delta\boldsymbol{\theta}+C^{\theta}_{1,2}\Delta\boldsymbol{\theta}_1\times\Delta\boldsymbol{\theta}_2+C^{\theta}_{1,3}\Delta\boldsymbol{\theta}_1\times\Delta\boldsymbol{\theta}_3+C^{\theta}_{2,3}\Delta\boldsymbol{\theta}_2\times\Delta\boldsymbol{\theta}_3+G_b\Delta\boldsymbol{\theta}'\times\Delta\boldsymbol{\theta}. \tag{21}$$

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

$$\delta\Phi_{\rm b}=\frac{1}{2}a_{\rm w}^2\Big[\Omega_{\rm w}T_{\rm a}-\sin(\Omega_{\rm w}T_{\rm a})-$$
$$8(C_{1,2}^{\theta}+C_{2,3}^{\theta})\sin^2\left(\frac{\Omega_{\rm w}T_{\rm a}}{6}\right)\sin\left(\frac{\Omega_{\rm w}T_{\rm a}}{3}\right)-$$
$$8C_{1,3}^{\theta}\sin^2\left(\frac{\Omega_{\rm w}T_{\rm a}}{6}\right)\sin\left(\frac{2\Omega_{\rm w}T_{\rm a}}{3}\right)-$$
$$8G_{\rm b}\sin^2\left(\frac{\Omega_{\rm w}T_{\rm a}}{2}\right)\sin(\Omega_{\rm w}T_{\rm a})\Big]. \tag{22}$$

将式 (22) 中的正弦函数用泰勒级数展开, 并令 $(\Omega_{\rm w}T_{\rm a})^3$, $(\Omega_{\rm w}T_{\rm a})^5$, $(\Omega_{\rm w}T_{\rm a})^7$ 的系数为零, 则可得如下 $C_{1,2}^{\theta}$, $C_{1,3}^{\theta}$, $C_{2,3}^{\theta}$ 及 $G_{\rm b}$ 的最优值:

$$C_{1,2}^{\theta}+C_{2,3}^{\theta}=1539/1120,$$
$$C_{1,3}^{\theta}=243/360,$$
$$G_{\rm b}=1/3360.$$

可以看出, $C_{1,2}^{\theta}$, $C_{2,3}^{\theta}$ 值不是唯一的, 选择不同的 $C_{1,2}^{\theta}$, $C_{2,3}^{\theta}$ 值可以得到不同的算法, 但只要其和保持不变, 则算法的精度相同. 改进的三子样算法误差

$$\delta\Phi_{\rm b}=\frac{a_{\rm w}^2(\Omega_{\rm w}T_{\rm a})^9}{3\,674\,160}. \tag{23}$$

同理, 改进的二子样等效旋转矢量算法及其误差分别为

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\rm b}=\Delta\boldsymbol{\theta}+\frac{32}{45}\Delta\boldsymbol{\theta}_1\times\Delta\boldsymbol{\theta}_2-\frac{1}{180}\Delta\boldsymbol{\theta}'\times\Delta\boldsymbol{\theta},$$
$$\delta\Phi_{\rm b}=\frac{a_{\rm w}^2(\Omega_{\rm w}T_{\rm a})^7}{10\,080}. \tag{24}$$

改进的单子样等效旋转矢量算法及其误差分别为

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\rm b}=\Delta\boldsymbol{\theta}+\frac{1}{12}\Delta\boldsymbol{\theta}'\times\Delta\boldsymbol{\theta},$$
$$\delta\Phi_{\rm b}=\frac{a_{\rm w}^2(\Omega_{\rm w}T_{\rm a})^5}{60}. \tag{25}$$

3 典型圆锥运动下的仿真结果

在自行设计的 SINS 模拟器上进行算法验证. 该模拟器以 Matlab/GUI 为仿真平台, 可实现任意参考轨迹输入下的导航参数解算.

在典型的圆锥运动环境下, 对单子样等效旋转矢量算法 (算法 1)、三子样等效旋转矢量算法 (算法 2) 和本文算法 (算法 3) 进行对比仿真. 设载体的俯仰轴做圆锥运动, 参数设置如下:

圆锥运动幅度 $a_{\rm w}=1^\circ$,

圆锥运动角速率 $\Omega_{\rm w}=\pi\,{\rm rad\cdot s^{-1}}$,

采样间隔 $T_{\rm a}=0.01\,{\rm s}$, 仿真时间 $40\,{\rm s}$.

算法 1 单子样等效旋转矢量算法

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\rm b}=\Delta\boldsymbol{\theta}.$$

算法 2 三子样等效旋转矢量算法

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\rm b}=\Delta\boldsymbol{\theta}+\frac{57}{80}\Delta\boldsymbol{\theta}_1\times\Delta\boldsymbol{\theta}_2+$$
$$\frac{33}{80}\Delta\boldsymbol{\theta}_1\times\Delta\boldsymbol{\theta}_3+\frac{57}{80}\Delta\boldsymbol{\theta}_2\times\Delta\boldsymbol{\theta}_3.$$

算法 3 改进的单子样等效旋转矢量算法

$$\hat{\boldsymbol{\Phi}}_{\rm b}=\Delta\boldsymbol{\theta}+\frac{1}{12}\Delta\boldsymbol{\theta}'\times\Delta\boldsymbol{\theta}.$$

各算法的仿真结果如图 1~3 所示. 由于载体仅在俯仰轴做圆锥运动, 图中数据均显示了俯仰角计算误差在圆锥运动过程中的突出性, 说明无论对于哪种算法, 产生圆锥运动的旋转轴所对应的姿态误差相对其他两轴均较为明显.

比较图 1 与图 2 中的数据可以看出, 增加等效旋转矢量算法的子样数可明显提高姿态解算精度, 算法 1 的俯仰角误差数量级为 10^{-1}, 航向角误差数量级为 10^{-2}, 倾斜角误差数量级为 10^{-5}, 而算法 2 的误差数量级分别为 10^{-6}, 10^{-8}, 10^{-9}, 但其高精度是以增加 CPU 计算负担为代价的. 本文算法在三个轴的误差数量级分别为 10^{-4}, 10^{-6}, 10^{-7}, 该精度要远高于算法 1, 虽然精度稍低于算法 2, 但本文算法只采用单一子样, 与算法 2 采用三子样相比, 极大降低了 CPU 的计算负担, 说明改进方法能够较好地对计算负担和计算精度进行折中, 验证了其有效性.

4 结论

研究了基于等效旋转矢量的 SINS 姿态更新算法, 针对四元数法在高动态环境下存在较大解算误差问题, 基于四元数理论研究了适用于高动态飞行环境的 SINS 姿态矩阵更新的等效旋转矢量算法. 该算法相比四元数法, 增加了等效旋转矢量和姿态变换四元

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

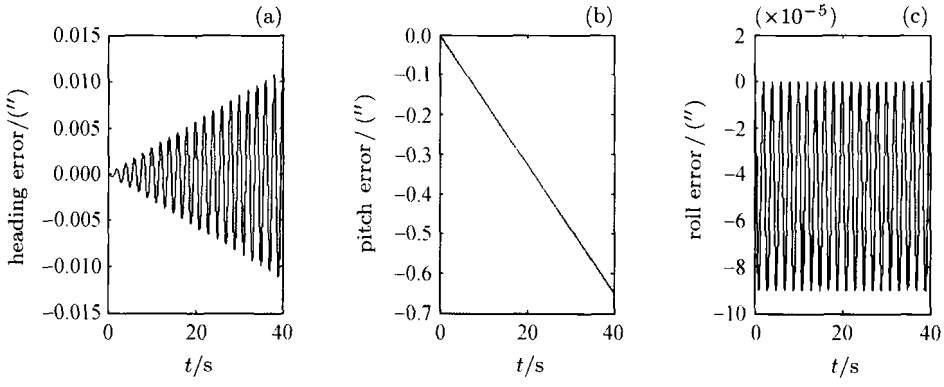

图 1 算法 1 的航向和姿态角计算误差

Fig. 1 Heading and attitude errors calculated by Algorithm 1

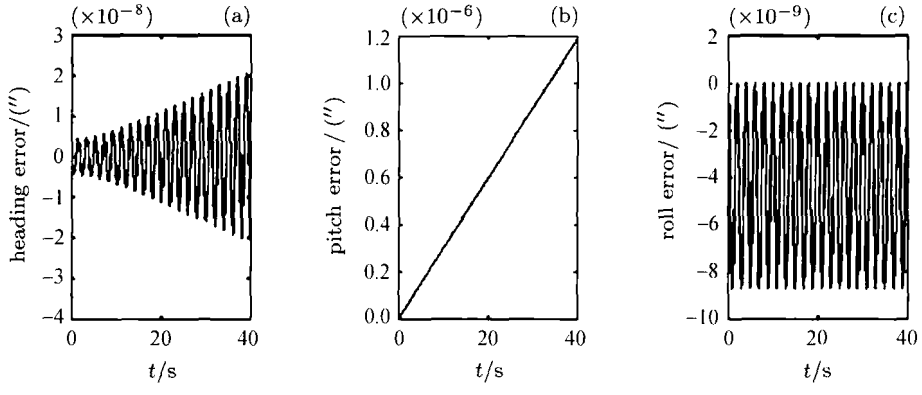

图 2 算法 2 的航向和姿态角计算误差

Fig. 2 Heading and attitude errors calculated by Algorithm 2

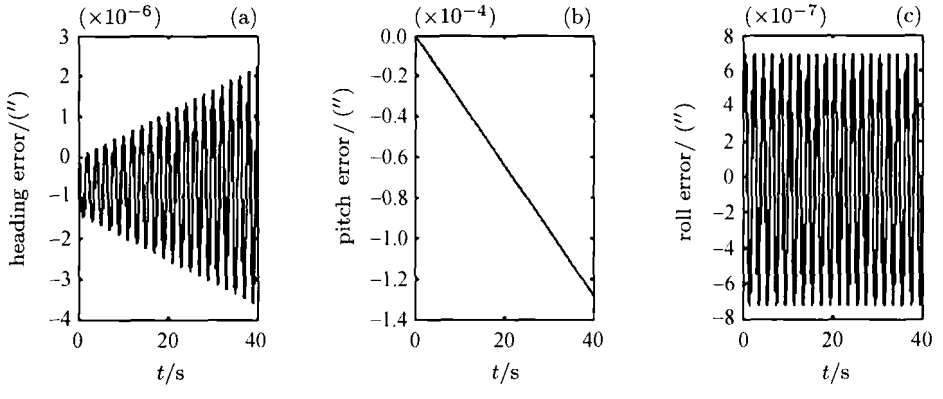

图 3 算法 3 的航向和姿态角计算误差

Fig. 3 Heading and attitude errors calculated by Algorithm 3

数的计算环节, 使解算误差大大减小. 由于圆锥运动是检验捷联惯导姿态更新算法精度的最佳环境条件, 因此, 本文以圆锥运动作为环境条件, 对等效旋转矢量算法进行了改进, 以提高等效旋转矢量算法对于极

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net

端飞行环境的适应性, 仿真结果验证了改进算法的有效性.

参考文献

[1] Savage P G. Strap-down inertial navigation integration algorithm design part I: attitude algorithm [J]. *J. Guid. Contr. Dyn.*, 1998, **21**(1):57-62

[2] Roscoe K M. Equivalency between strapdown inertial navigation coning and sculling integrals/algorithms [J]. *J. Guid. Contr. Dyn.* 2001, **24**(2):145-152

[3] Ben Yueyang. Research of Strapdown Inertial Navigation Algorithm under Highly Dynamic Environment [D]. Harbin: Harbin Engineering University, 2008. In Chinese (奔粤阳. 高动态环境捷联惯导算法研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学, 2008)

[4] Mu Shuzhi, Bu Xiongzhu, Li Yongxin. Research on attitude algorithm of strapdown inertial navigation system under the condition of high dynamic motion [J]. *J. Proj. Rocket. Miss. Navig.*, 2006, **26**(3):11-16. In Chinese (牟淑志, 卜雄洙, 李永新. 高动态环境下的捷联惯导系统姿态算法的研究 [J]. 弹箭与制导学报, 2006, **26**(3):11-16)

[5] Wu Jun, Bao Qilian. Research on high precision optimized strapdown attitude algorithms [J]. *Electr. Meas. Tech.*, 2010, **33**(2):49-52. In Chinese (吴军, 鲍其莲. 高精度捷联惯导姿态更新优化算法研究 [J]. 电子测量技术, 2010, **33**(2):49-52)

[6] Qin Yongyuan. Inertial Navigation [M]. Beijing: Science Press, 2006. In Chinese (秦永元. 惯性导航 [M]. 北京: 科学出版社, 2006)

[7] Li Jianwen, Hao Shunyi. On precise positioning method for highly dynamic GPS/SINS integrated navigation [J]. *Inf. Contr.*, 2009, **38**(3):304-308. In Chinese (李建文, 郝顺义. 高动态 GPS/SINS 组合导航精确定位方法研究 [J]. 信息与控制, 2009, **38**(3):304-308)

[8] Xue Zurui. Discussion on coning errors of strapdown inertial system [J]. *J. Chin. Inert. Tech.*, 2000, **8**(4):46-50. In Chinese (薛祖瑞. 关于捷联惯导系统圆锥误差的诠释 [J]. 中国惯性技术学报, 2000, **8**(4):46-50)

[9] Lee J G, Yoon Y J, Mark J G. Extension of strap-down attitude algorithm for high-frequency base motion [J]. *IEEE Trans. Aeros. Elect. Syst.*, 1994, **30**(4):235-242

© 1994-2013 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net