

Yang Chengwei, Zheng Jianhua, Li Mingtao, Deng Xiping. Autonomous navigation based on pulsar in libration point orbit of sun-earth system. *Chin. J. Space Sci.*, 2013, **33**(1): 79-84

基于脉冲星的日地系平动点轨道自主导航研究^{*}

杨成伟^{1,2} 郑建华¹ 李明涛¹ 邓新坪^{1,2}

1(中国科学院空间科学与应用研究中心 北京 100190)

2(中国科学院大学 北京 100049)

摘 要 给出一种利用 X 射线脉冲星的平动点轨道自主导航算法. 分析了 X 射线脉冲星导航原理, 以脉冲到达时间差值为基本观测量, 建立导航系统观测方程. 在高精度星历模型下, 对日地系 L_1 点 Halo 轨道建立数学模型, 利用基于 UD 分解的无迹卡尔曼滤波方法进行导航定位, 并研究了摄动因素对导航结果的影响. 仿真结果表明, 在日地系平动点轨道的自主导航中, X 射线脉冲星导航是可行的.

关键词 X 射线脉冲星, 平动点, Halo 轨道, 自主导航, UD 分解无迹卡尔曼滤波

中图分类号 V 448.224

Autonomous Navigation Based on Pulsar in Libration Point Orbit of Sun-Earth System

YANG Chengwei^{1,2} ZHENG Jianhua¹ LI Mingtao¹ DENG Xiping^{1,2}

1(Center for Space Science and Applied Research, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190)

2(University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

Abstract The application of X-ray pulsar navigation in libration point orbit was discussed. The principle of X-ray pulsar autonomous navigation was analyzed. Difference between the real time and the estimated time of pulse arrival was regarded as the basal measurement. The system model was the full ephemeris dynamic model of Halo orbit around L_1 point of the Sun-Earth system. The Unscented Kalman Filter (UKF) based on UD factorization was applied to estimate the state of the system. Perturbation factors were discussed to analyze their influence on navigation precision. The simulation results demonstrate that this algorithm is feasible for the autonomous libration point orbit determination in the Sun-Earth system. The method that applies full ephemeris dynamic model and X-ray pulsar-based navigation principle can accomplish the autonomous navigation mission in the libration orbits. Besides, the navigation results are able to converge and the accuracy is enough to meet the navigation demand.

Key words X-ray pulsar, Libration point, Halo orbit, Autonomous navigation, UD-UKF

^{*} 空间科学预先研究项目资助 (XDA04074300)

2011-10-08 收到原稿, 2012-09-17 收到修定稿

E-mail: yangchengwei2009@126.com

0 引言

平动点轨道因其特殊的力学环境,在深空探测中具有重要应用.日地系 L_1 点可以预警太阳风暴^[1],地月系 L_2 点可以进行月球背面的探测任务^[2].目前,国际上已发射多颗平动点轨道探测器,中国的嫦娥二号在扩展任务中已到达日地系 L_2 点,同时,中国还在积极酝酿更多的平动点轨道探测计划.

针对平动点轨道探测器的导航方法已有许多积极探索^[3-7],例如,在会合坐标系中建立圆形限制性三体问题模型或在惯性坐标系中建立高精度星历模型,通过地面测控或星间测距完成导航定位.

X 射线脉冲星导航具有完全自主性,且定位精度高,误差不随时间积累.为提高平动点轨道探测器的自主导航能力,本文利用脉冲星导航方式对日地系 L_1 点的 Halo 轨道探测器进行导航定位.在导航算法的动力学建模中,采用惯性系下平动点轨道的高精度星历动力学模型,更加贴近探测器真实的力学环境,为工程应用提供参考.

1 平动点轨道动力学模型

平动点轨道常涉及的两种坐标系是会合坐标系和惯性坐标系.由于脉冲星信息、星历信息、摄动信息都是在惯性系下描述的,如果转换到会合坐标系会使计算过程繁琐,降低计算效率,不利于工程应用.基于以上考虑,X 射线脉冲星在日地系平动点的导航应用中采用惯性坐标系.

1.1 高精度星历轨道动力学模型

将日地系 L_1 点 Halo 轨道模型建立在太阳系质心 J2000 惯性坐标系 (BCRS, Barycentric Celestial Reference System) 中,其方程为^[8]

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{r}} = \mathbf{v} \\ \dot{\mathbf{v}} = \sum_{i=1}^{n_p} \left(\mu_i \frac{\mathbf{r}_{ri}}{r_{ri}^3} \right) - \frac{AG}{mr_{rs}^3} \mathbf{r}_{rs} + \mathbf{a} \end{cases} \quad (1)$$

式中, $\mathbf{r}$ 和 $\mathbf{v}$ 分别为探测器相对太阳系质心的位置和速度矢量, $\mathbf{r}_{rs}$ 和 r_{rs} 分别为太阳相对于探测器的位置矢量及其模, $n_p = 11$, 为引力天体数目 (除太阳和地球外,还考虑了太阳系内其他七大行星以及冥王星和月球), μ_i 为引力天体的引力常数, $\mathbf{r}_{ri}$ 和 r_{ri} 分别为第 i 颗天体相对探测器的位置矢量和矢量模, A 为探测器横截面积, G 为太阳光压系数, m 为探测器质

量, $\mathbf{a}$ 为各种未建模的加速度矢量.

选取状态变量为探测器相对于太阳系质心的位置矢量和速度矢量,即

$$\mathbf{X} = [x \ y \ z \ v_x \ v_y \ v_z]^T,$$

则由式 (1) 可得系统的状态方程为

$$\dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{X}, t) + \mathbf{w}(t). \quad (2)$$

式中, $\mathbf{F}(\mathbf{X}, t)$ 为由式 (1) 得到的非线性函数,有

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ \sum_{i=1}^{n_p} \left(\mu_i \frac{r_{pix} - x}{\|\mathbf{r}_{pi} - \mathbf{r}\|^3} \right) - \mathcal{A}(r_{psx} - x) \\ \sum_{i=1}^{n_p} \left(\mu_i \frac{r_{piy} - y}{\|\mathbf{r}_{pi} - \mathbf{r}\|^3} \right) - \mathcal{A}(r_{psy} - y) \\ \sum_{i=1}^{n_p} \left(\mu_i \frac{r_{piz} - z}{\|\mathbf{r}_{pi} - \mathbf{r}\|^3} \right) - \mathcal{A}(r_{psz} - z) \end{bmatrix}. \quad (3)$$

$$\mathcal{A} = \frac{AG}{m\|\mathbf{r}_{ps} - \mathbf{r}\|^3}.$$

式中,

$$\mathbf{r} = [x \ y \ z]^T,$$

$$\mathbf{r}_{pi} = [r_{pix} \ r_{piy} \ r_{piz}]^T$$

为第 i 颗天体在 BCRS 中的位置矢量,

$$\mathbf{r}_{ps} = [r_{psx} \ r_{psy} \ r_{psz}]^T$$

为太阳质心在 BCRS 中的位置矢量, $\mathbf{w}(t)$ 是均值为 0 方差为 $\mathbf{q}(t)$ 的白噪声. 对系统进行离散化,有

$$\mathbf{X}_{k+1} = \Phi_{k+1/k} \mathbf{X}_k + \Gamma_{k+1/k} \mathbf{W}_k. \quad (4)$$

式中, $\Phi_{k+1/k} = \Phi(t_{k+1}, t_k)$ 满足

$$\dot{\Phi}(t, t_k) = f \Phi(t, t_k),$$

$$\Phi(t_k, t_k) = \mathbf{I}_{6 \times 6}.$$

$\mathbf{I}_{6 \times 6}$ 为 6×6 阶单位阵, $f = \partial \mathbf{F} / \partial \mathbf{X}$. $\Gamma_{k+1/k}$ 满足

$$\Gamma_{k+1/k} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \Phi(t_{k+1}, \tau) d\tau,$$

$\mathbf{W}_k$ 是均值为 0 方差为 $\mathbf{Q}_k = \mathbf{q}(t_k) / \Delta t$ 的白噪声.

1.2 标称轨道初值计算

在应用惯性系下的高精度星历轨道动力学模型时, 需要先在圆型限制性三体问题模型的会合坐标系下计算初值, 再转换到惯性系中。

Halo 轨道采用圆型限制性三体问题模型描述时, 由三个参数决定: z 向幅值、南北族参数和初始相位. x 向幅值和 y 向幅值可由 z 向幅值得到, 南北族参数决定了轨道方位, 初始相位决定了初始点在轨道中的位置。

在会合坐标系下获取初始解析解, 需要建立圆型限制性三体问题动力学模型并进行单位的归一化, 具体实现过程参见文献 [9]. 利用 Lindstedt-Poincare 方法可获得 Halo 轨道的三阶近似解析解 [10]:

$$\begin{aligned} x &= a_{21}A_x^2 + a_{22}A_z^2 - A_x \cos \tau_1 + \\ &\quad (a_{23}A_x^2 - a_{24}A_z^2) \cos 2\tau_1 + \\ &\quad (a_{31}A_z^3 - a_{32}A_xA_z^2) \cos 3\tau_1, \\ y &= \kappa A_x \sin \tau_1 + (b_{21}A_x^2 - b_{22}A_z^2) \sin 2\tau_1 + \\ &\quad (b_{31}A_x^3 - b_{32}A_xA_z^2) \sin 3\tau_1, \\ z &= \delta_m A_z \cos \tau_1 + \delta_m d_{21} A_z (\cos 2\tau_1 - 3) + \\ &\quad \delta_m (d_{32}A_zA_x^2 - d_{31}A_z^3) \cos 3\tau_1. \end{aligned} \quad (5)$$

式 (5) 中, x, y, z 为探测器在会合坐标系中相对于平动点的坐标值, 等号右侧除 τ_1 为时间变量外, 其余参数均为常量, 具体设置参见文献 [9], 其中, A_x 和 A_z 分别表示 Halo 轨道的 x 向和 z 向幅值。

在获取初始解析解后, 利用圆型限制性三体问题模型的微分修正方法对初值进行修正; 再转换到太阳系质心 J2000 惯性系中, 最后利用二级微分修正方法获得高精度星历模型下的精确数值解. 具体设计方法可参见文献 [8, 11–12].

图 1 给出了归一化单位下, 日地系 L_1 点附近 z 向幅值为 150 000 km 的北族 Halo 轨道。

2 X 射线脉冲星导航原理

X 射线脉冲星导航原理可以描述为 [13]: X 射线脉冲星在高速自转运动的同时, 向外辐射 X 射线, 利用深空探测器上安装的 X 射线探测仪和星载原子钟, 能够探测并记录 X 射线光子到达探测器的时间, 经转换可得出脉冲到达太阳系质心的时间. 通过计算

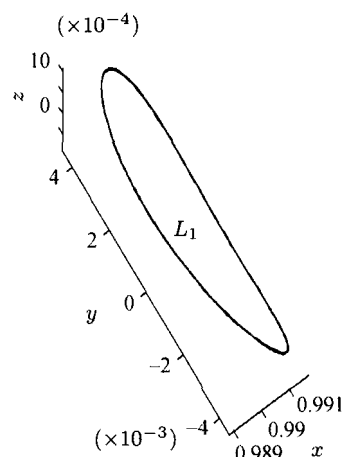


图 1 日地系 L_1 点附近北族 Halo 轨道

Fig. 1 Sun-Earth L_1 north Halo orbit

脉冲星计时预报模型可以得到同一个脉冲信号到达太阳系质心的时间, 在考虑相对论效应的情况下, 简化可得 [14]

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_{\text{SSB}} - t_{\text{SC}} = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r}}{c} + \\ &\quad \frac{1}{2cD_0} [(\mathbf{n} \cdot \mathbf{r})^2 - r^2] + \\ &\quad \frac{2\mu_s}{c^3} \ln \left| \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} + r}{\mathbf{n} \cdot \mathbf{b} + b} + 1 \right|. \end{aligned} \quad (6)$$

其中, t_{SSB} 为脉冲到达太阳系质心时间, t_{SC} 为脉冲到达探测器时间, Δt 为 t_{SSB} 与 t_{SC} 之差, $\mathbf{n}$ 为 BCRS 中脉冲星位置方向的单位矢量, $\mathbf{r}$ 和 r 分别为深空探测器在 BCRS 中的估计位置矢量及其模, c 为光速, D_0 为太阳系质心到脉冲星的距离, $\mathbf{b}$ 和 b 分别为太阳系质心在太阳质心 J2000 惯性坐标系中的位置矢量及其模, μ_s 为太阳引力常数. 式 (6) 为 X 射线脉冲星导航的观测模型。

脉冲到达太阳系质心的计时预报模型为 [13]

$$\Phi(t) = \Phi(t_0) + \nu(t-t_0) + \frac{1}{2}\dot{\nu}(t-t_0)^2 + \frac{1}{6}\ddot{\nu}(t-t_0)^3. \quad (7)$$

式中, $\Phi(t)$ 为历元 t 累计的总脉冲相位, $\Phi(t_0)$ 为初始时刻相位, ν , $\dot{\nu}$ 和 $\ddot{\nu}$ 分别为脉冲信号频率及其一阶和二阶导数。

研究表明 [13], X 射线脉冲星导航的测量噪声可视为白噪声, 用测距精度来表达, 可表示为

$$\sigma = \frac{\sqrt{[B_x + F_x(1 - p_f)]A_e T_{\text{obs}} d_r + F_x A_e p_f T_{\text{obs}}}}{F_x A_e p_f T_{\text{obs}}} W_{\text{hc}}. \quad (8)$$

式中, B_x 为 X 射线背景辐射流量, F_x 为辐射光子流量, p_f 为一个周期内的脉冲辐射流量与平均辐射流量之比, A_e 为 X 射线探测仪有效面积, T_{obs} 为观测时间, W_h 为脉冲半宽度, d_r 为脉冲宽度与脉冲周期之比, c 为光速.

X 射线脉冲星导航测量方程为

$$\mathbf{Z}(k) = [\Delta t_1 \quad \cdots \quad \Delta t_i]^T = \mathbf{H}(k)\mathbf{X} + \boldsymbol{\nu}(k), \tag{9}$$

$$\mathbf{H}(k) = \begin{bmatrix} n_{1x}/c & n_{1y}/c & n_{1z}/c & 0 & 0 & 0 \\ n_{2x}/c & n_{2y}/c & n_{2z}/c & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ n_{ix}/c & n_{iy}/c & n_{iz}/c & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{10}$$

式中, $\mathbf{H}(k)$ 为 $i \times 6$ 维矩阵, i 为利用的脉冲星个数, $\mathbf{n}_i = [n_{ix} \quad n_{iy} \quad n_{iz}]^T$ 为第 i 颗脉冲星在 BCRS 中位置的单位矢量, $\boldsymbol{\nu}(k)$ 为脉冲星导航的测量噪声.

3 基于 UD 分解的 UKF 算法

与 EKF (Extended Kalman Filter) 相比, UKF (Unscented Kalman Filter) 滤波算法不需要进行方程的线性化, 在解决非线性估计问题时具有更高精度. 标准的 UKF 算法参见文献 [15].

但在量测更新中求解增益矩阵 $\mathbf{K}_k$ 时,

$$\mathbf{K}_k = \mathbf{P}_{x_k y_k} \mathbf{P}_{y_k y_k}^{-1}, \tag{11}$$

需要计算协方差阵 $\mathbf{P}_{y_k y_k}$ 的逆, 这会影响数值计算的稳定性. 为避免协方差阵求逆过程中产生的舍入误差, 可以先对 $\mathbf{P}_{y_k y_k}$ 阵进行 UD 分解. 这里定义 $\mathbf{U}$ 为单位上三角阵, $\mathbf{D}$ 为对角矩阵.

令 $\mathbf{P} = \mathbf{P}_{y_k y_k}$, 则矩阵 $\mathbf{P}$ 的 UD 分解如下 [16]:

$$\begin{cases} \mathbf{D}_{nn} = \mathbf{P}_{nn}, \\ \mathbf{U}_{in} = \begin{cases} 1, & i = n, \\ \frac{\mathbf{P}_{in}}{\mathbf{D}_{nn}}, & i = n-1, n-2, \cdots, 1; \end{cases} \end{cases} \tag{12}$$

$$\mathbf{D}_{jj} = \mathbf{P}_{jj} - \sum_{k=j+1}^n \mathbf{D}_{jk} \mathbf{U}_{jk}^2; \tag{13}$$

$$\mathbf{U}_{ij} = \begin{cases} j = n-1, & n-2, \cdots, 1, \\ 0, & i > j, \\ 1, & i = j, \\ \frac{\mathbf{P}_{ij} - \sum_{k=j+1}^n \mathbf{D}_{kk} \mathbf{U}_{ik} \mathbf{U}_{jk}}{\mathbf{D}_{jj}}, & i = j-1, j-2, \cdots, 1. \end{cases} \tag{14}$$

其中, n 表示状态变量的维数, 下标 i 和 j 表示矩阵元素所处的位置. 则增益矩阵为

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \mathbf{P}_{x_k y_k} (\mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^T)^{-1} = \\ &\mathbf{P}_{x_k y_k} (\mathbf{U}^T)^{-1} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{U}^{-1}. \end{aligned} \tag{15}$$

由于 $\mathbf{U}$ 为单位上三角阵, $\mathbf{D}$ 为对角矩阵, 在利用公式法计算逆矩阵过程中便可以增强数值计算的稳定性, 提高计算精度, 进而提高导航精度.

4 数学仿真

4.1 仿真条件

数值仿真条件如下.

- (1) 标称轨道为日地系 L_1 点北族 Halo 轨道.

(2) Halo 轨道 z 向幅值为 150 000 km, 初始相位为 0, 星历采用 DE405, 初始历元为 2 457 175.0 JD, 二级微分修正中的位置平滑精度为 10^{-6} km, 速度平滑精度为 10^{-6} km·s⁻¹.

(3) 卫星质量取为 435 kg, 光压反射面积为 3.55 m², 光压反射系数为 1.24.

(4) 初始误差: 各轴向位置误差均为 10 km, 各轴向速度误差均为 10^{-3} km·s⁻¹.

(5) 导航采用的脉冲星为 PSR B0531+21, PSR B1937+21, PSR B1957+20, PSR B1821-24.

(6) X 射线探测仪有效面积为 1 m², 脉冲信号积分时间为 500 s, 滤波周期为 500 s, 总仿真时间取 Halo 轨道 1/4 个周期, 约为 3 838 000 s.

4.2 仿真结果

图 2 给出的是 X 射线脉冲星导航的位置误差和速度误差, 从图 2 中可以清晰看出, 导航结果收敛. 以滤波稳定后采样点均方根误差 (RMSE, Root Mean Square Error) 值来描述导航的位置精度和速度精度, 位置精度为 0.217 519 km, 速度精度为 2.961 024 ×

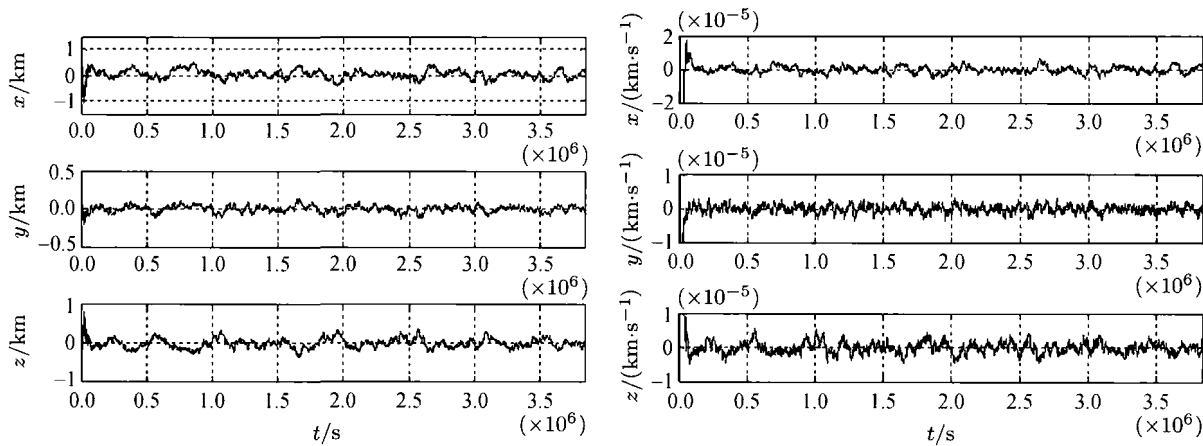


图 2 X 射线脉冲星导航位置误差和速度误差
Fig. 2 Position and velocity errors of X-ray pulsar-based navigation

$10^{-6} \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. 仿真结果表明, 本文方法在日地系平动点轨道的导航中能够可靠收敛且导航精度满足任务要求.

4.3 仿真分析

为研究摄动因素对导航结果的影响, 从状态方程中逐个去掉这些摄动因素进行导航, 并与状态方程采用完整模型的导航结果进行比较.

表 1 给出了导航状态方程中无太阳和地球以外其他天体引力摄动的结果. 从表 1 可以看出, 其他天体引力摄动项对导航精度有一定影响, 与完整模型的导航结果相比, 定位误差从百米级增到了千米级. 说明在导航建模中第三体引力摄动项的加入可以提高导航精度.

表 1 第三体引力摄动对导航精度的影响
Table 1 Gravitational perturbation influence on navigation precision

模型	位置/km	速度/($\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$)
无其他天体引力摄动	1.019651140	$4.480379933\times 10^{-5}$
完整模型	0.217519025	$2.961024288\times 10^{-6}$

表 2 给出了状态方程中不考虑太阳光压摄动和状态方程采用完整模型的对比结果. 从表 2 可以看出, 在 4.1 节的仿真条件下, 太阳光压对日地系平动点轨道导航精度的影响为米级, 因此, 在太阳系质心惯性系中进行日地系 L_1 点 Halo 轨道的导航计算时, 基本可以忽略太阳光压影响.

表 2 太阳光压摄动对导航精度的影响
Table 2 Solar radiation pressure influence on navigation precision

模型	位置/km	速度/($\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$)
无太阳光压摄动	0.218 755 020	$3.116\,606\,172\times 10^{-6}$
完整模型	0.217 519 025	$2.961\,024\,288\times 10^{-6}$

5 结论

利用高精度星历轨道动力学模型和 X 射线脉冲星导航方式, 进行了日地系平动点轨道自主导航的算法设计与分析, 研究了摄动因素对导航结果的影响. 由仿真结果可得出以下结论.

(1) 利用平动点轨道高精度星历动力学模型和 X 射线脉冲星导航理论, 能够完成平动点轨道的自主导航, 导航结果能够稳定收敛且导航精度可满足飞行任务要求.

(2) 在摄动因素中加入第三体引力摄动项能有效提高导航精度, 且 X 射线脉冲星导航方式在进行日地系 L_1 点 Halo 轨道的导航时, 可以忽略太阳光压对导航精度的影响.

(3) 仿真发现, 标称轨道在经过一个周期的递推后, 逐渐偏离周期轨道, 需要对其实施轨道修正, 才能保持探测器继续在周期轨道上飞行, 在实际的平动点轨道工程中, 也需要每隔半个周期或一个周期进行修正, 如何结合惯性导航保持平动点轨道探测器长时间自主飞行是未来有待深入研究的一个课题.

参考文献

- [1] Farquhar R W. The flight of ISEE-3/ICE: Origins, mission history, and a legacy [J]. *J. Astron. Sci.*, 2001, **49**(1):23-73
- [2] Xu Ming. Overview of orbital dynamics and control for libration point orbits [J]. *J. Astron.*, 2009, **30**(4):1299-1313. In Chinese (徐明. 平动点轨道的动力学与控制研究综述 [J]. 宇航学报, 2009, **30**(4):1299-1313)
- [3] Carpenter J R, Folta D C, Moreau M C, *et al.* Libration point navigation concepts supporting the vision for space exploration [C]//AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference. Rhode Island: Providence, 2004. 16-19
- [4] Anthony J G. Navigation Analysis of Earth-moon Libration Point Missions [D]. West Lafayette: Purdue University, 1990
- [5] Hill K A. Autonomous Navigation in Libration Point Orbits [D]. Boulder: University of Colorado, 2007
- [6] Hill K A, Parker J, Born G H, *et al.* A Lunar L_2 navigation, communication, and gravity mission [C]//AIAA/AAS Astrodynamics Specialist Conference. Keystone: Providence, 2006. 21-24
- [7] Beckman M. Orbit determination issues for libration point orbits [C]//Libration Point Orbits and Applications. Girona: Paradord Aiguablava, 2002. 10-14
- [8] Li Mingtao. Low Energy Trajectory Design and Optimization for Collinear Libration Points Missions [D]. Beijing: Center for Space Science and Applied Research, Chinese Academy of Sciences, 2010. In Chinese (李明涛. 共线平动点任务节能轨道设计与优化 [D]. 北京: 中国科学院空间科学与应用研究中心, 2010)
- [9] Kim M. Periodic Spacecraft Orbits for Future Space-based Deep Space Observations [D]. Vienna: Vienna University of Technology, 2001
- [10] Richardson D L. Analytical construction of periodic orbits about the collinear points [J]. *Celest. Mech.*, 1980, **22**(3):241-253
- [11] Gomez G, Jorba A, Martinez R, *et al.* Dynamics and Missions Design Near Libration Point Orbits: Volume 1, Fundamentals: The Case of Collinear Libration Points [M]. Singapore: World Scientific, 2000
- [12] Howell K C, Pernicka H J. Numerical determination of lissajous trajectories in the restricted three-body problem [J]. *Celest. Mech.*, 1988, **41**(1):107-124
- [13] Shuai Ping, Li Ming, Chen Shaolong, *et al.* Theory and Technique of X-ray Pulsars Navigation System [M]. Beijing: China Astronautic Publishing House, 2009. 395-403. In Chinese (帅平, 李明, 陈绍龙, 等. X 射线脉冲星导航系统原理与方法 [M]. 北京: 中国宇航出版社, 2009. 395-403)
- [14] Jianxun L, Xizheng K. Study on autonomous navigation based on pulsar timing model [J]. *Sci. China: G.* 2009, **52**(2):303-309
- [15] Julier S, Uhlmann J, Hugh F. A new method for the non-linear transformation of means and covariances in filters and estimators [J]. *IEEE Trans. Autom. Contr.*, 2000, **45**(3):477-482
- [16] Fu Mengyin, Deng Zhihong, Yan Liping. Theory and Application of Kalman Filter in Navigation System [M]. Beijing: Science Press, 2010. 78-79. In Chinese (付梦印, 邓志红, 闫莉萍. Kalman 滤波理论及其在导航系统中的应用 [M]. 北京: 科学出版社, 2010. 78-79)