

附加深空机动的借力飞行全局优化

李小玉^{1,2} 郑建华¹

1(中国科学院空间科学与应用研究中心 北京 100190)

2(中国科学院大学 北京 100049)

摘要 借力飞行轨道设计是一个多变量强约束的非线性优化问题, 初始方案通常采用不需要初值猜测的全局优化算法进行优化, 但是借力点处的 C3 匹配原则等较强的约束条件极大影响了全局算法的收敛性能. 针对这一问题, 研究了附加深空机动的借力飞行模型, 在借力点处引入 B 平面和辅助转角, 推导了离开超越速度的解析表达式. 通过求解 Lambert 问题和轨道递推得到日心转移段的深空机动脉冲. 利用微分进化算法对问题进行优化, 结合木星探测算例, 对 VEE (Venus-Earth-Earth), VEME (Venus-Earth-Mars-Earth) 和 VEVE (Venus-Earth-Venus-Earth) 三种深空机动借力飞行方案进行优化, 给出了优化结果.

关键词 星际探测, 借力飞行, 深空脉冲机动, 微分进化

中图分类号 V 412.4

Global Optimization of Gravity-assist Trajectory With Deep Space Maneuvers

LI Xiaoyu^{1,2} ZHENG Jianhua¹

1(Center for Space Science and Applied Research, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190)

2(University of Chinese Academy of Sciences, Beijing 100049)

Abstract The problem of optimal design of a multi-gravity-assist space trajectory with deep space maneuvers is studied. Based on the zero-sphere-of-influence and patched conic hypothesis, the deep space trajectory is split into segments linked by deep space maneuvers and gravity assists. After introducing an auxiliary angle and B plane, the outgoing excess velocity could be expressed analytically. The deep space maneuver was computed by solving Lambert problem and trajectory propagation. The differential evolution algorithm is used to handle afore mentioned global optimization problem. Three cases to Jupiter, with gravity sequences of Venus-Earth-Earth (VEE), Venus-Earth-Mars-Earth (VEME) and Venus-Earth-Venus-Earth (VEVE) have been optimized.

Key words Deep-space exploration, Gravity-assists, Deep-space maneuvers, Differential evolution

2011-10-27 收到原稿, 2012-11-16 收到修定稿

E-mail: lixiaoyu@nssc.ac.cn

0 引言

借力飞行轨道设计的原理来自 17 世纪末达朗伯尔等研究彗星时的偶然发现——引力摄动现象。当前, 借力飞行已成为深空探测轨道设计研究领域中的热点。借助行星引力, 有选择地改变探测器飞行轨迹, 既可实现变轨, 节省发射能量, 又可实现多天体多目标探测, 提高轨道利用率, 因此, 借力飞行在伽利略 (Galileo) 木星探测器^[1]、尤利西斯 (Ulysses) 太阳探测器^[2-3]、卡西尼-惠更斯 (Cassini-Huygens) 土星探测器^[4-5] 等多个太阳系行星探测任务中得到了成功应用。

1988 年 Broucke^[6] 将探测器借力飞行过程的轨迹分段, 采用二体模型研究了借力飞行前后探测器速度、能量和动能的变化情况, 得出向前绕飞能量减少, 向后绕飞能量增加的结论。Breakwell^[7] 证明了圆锥曲线拼接法设计行星际转移轨道的合理性。

由于借力飞行的作用受到借力星体体积、质量等限制, 有时达不到理想要求, 随之衍生出了脉冲机动借力飞行^[8] (Powered Gravity Assist, PGA)、气动-引力辅助转移技术^[9-10] (Aero-Gravity Assist, AGA) 等借力飞行方式, 在借力飞行时对探测器施加推力或气动阻力, 来放宽借力飞行的速度匹配约束, 降低轨道设计难度。这种策略也被称为 C3 软匹配策略^[11]。

本文研究了附加深空脉冲机动 (Deep Space Maneuver, DSM) 的借力飞行轨道优化问题, 在 C3 完全匹配的前提下利用 B 平面分析了借力飞行的速度矢量关系, 得到附加深空机动的借力飞行全局优化模型, 并利用微分进化算法进行优化, 以期在借力飞行轨道设计初始阶段提供更多的可选方案。对木星探测中常用的金星-地球-地球 (VEE)、金星-地球-火星-地球 (VEME) 和金星-金星-地球-地球 (VVEE) 三种方案设计了附加深空机动借力飞行轨道, 验证了模型的可行性。

1 圆锥曲线拼接法

探测器在二体问题下的运动方程为

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} = 0. \quad (1)$$

根据圆锥曲线拼接假设, 探测器的飞行轨道由日

心转移轨道和借力飞行双曲线轨道拼接而成。由于借力飞行和深空机动的时间远远小于日心转移轨道飞行时间, 深空机动和借力飞行均可视为瞬时完成, 即探测器位置不变, 速度改变, 如图 1 所示。

假设探测器逃逸速度大小为 v_0 , 逃逸速度俯仰角和偏航角分别为 ϕ, φ , 并设日心转移轨道飞行时间为 T , 深空机动时间为 T_d , 深空机动前探测器的日心位置矢量为 \mathbf{r}_d , 速度矢量为 \mathbf{v}_d^- 。求解 \mathbf{r}_d 到下一个借力行星的 Lambert 问题, 即可得到深空机动后探测器的日心速度矢量 \mathbf{v}_d^+ , 则深空机动所需的速度增量

$$\Delta \mathbf{v}_d = \mathbf{v}_d^+ - \mathbf{v}_d^-. \quad (2)$$

探测器进入借力行星影响球后, 其轨迹为双曲线轨道。与深空机动不同的是, 借力飞行需要满足星历约束, 并且, 借力产生的速度脉冲还受到借力行星的引力常数、飞越安全高度等约束。

2 借力飞行轨道

设借力前探测器日心速度为 \mathbf{v}_{sc}^- , 双曲线超越速度为 \mathbf{v}_{∞}^- ; 借力后探测器日心速度为 \mathbf{v}_{sc}^+ , 双曲线超越速度为 \mathbf{v}_{∞}^+ , 借力行星轨道速度为 \mathbf{v}_{ga} 。在影响球边界轨道拼接条件为

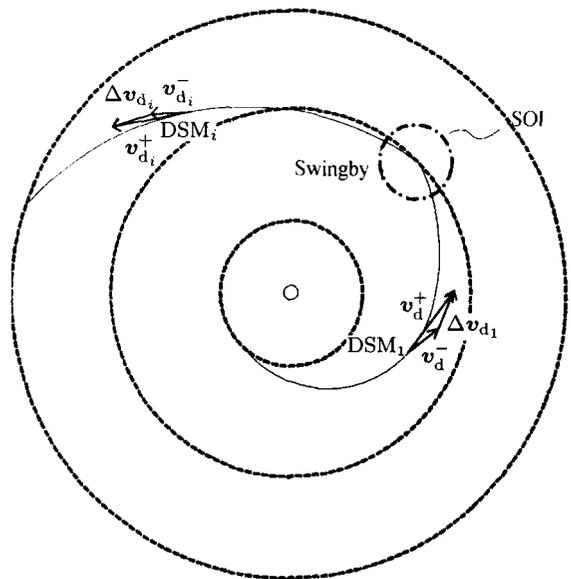


图 1 圆锥曲线拼接示意

Fig. 1 Patched conics

$$\mathbf{v}_{\infty}^{-} = \mathbf{v}_{sc}^{-} - \mathbf{v}_{ga}, \quad (3)$$

$$\mathbf{v}_{\infty}^{+} = \mathbf{v}_{sc}^{+} - \mathbf{v}_{ga}. \quad (4)$$

探测器借力飞行双曲线轨道如图 2 所示. 半长轴 a 、偏心率 e 以及超越速度转角 δ 分别为

$$a = -\frac{\mu_p}{v_{\infty}^2}, \quad (5)$$

$$e = 1 + \frac{r_p v_{\infty}^2}{\mu_p}, \quad (6)$$

$$\delta = 2\arcsin(1/e). \quad (7)$$

式 (6) 中, $r_p = R + h_s$, 这里, R 为借力行星的平均半径, h_s 为飞越安全高度. 超越速度转角 δ 与借力行星引力系数 μ_p 和飞越安全高度 h_s 有关. 探测器相对于借力行星能量守恒, 因此, $\|\mathbf{v}_{\infty}^{-}\| = \|\mathbf{v}_{\infty}^{+}\| = v_{\infty}$.

探测器的离开超越速度 \mathbf{v}_{∞}^{+} 在以 \mathbf{v}_{∞}^{-} 为轴、 δ 为角的空间圆锥上. 为确定 \mathbf{v}_{∞}^{+} , 首先要确定借力飞行锥轨道面. 这里引入 B 平面的概念. B 平面定义为通过借力行星质心并垂直于双曲线渐近线的平面, 如图 3 所示. 图 3 中, 单位矢量 \hat{S} 平行于双曲线轨道的进入渐近线, 有

$$\hat{S} = \mathbf{v}_{\infty}^{-}/v_{\infty},$$

单位矢量 \hat{N} 沿着借力行星轨道角动量方向, 单位矢量

$$\hat{T} = \hat{S} \times \hat{N},$$

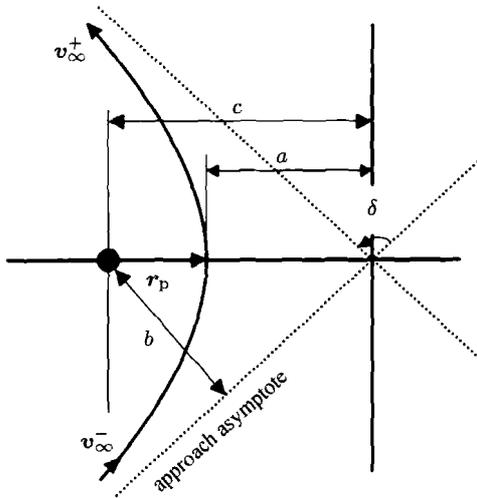


图 2 借力飞行双曲线轨道

Fig. 2 Hyperbolic orbit of Swing-by

\hat{R} 与 \hat{S} , \hat{T} 构成右手坐标系. 显然 \hat{T} , \hat{R} 都在 B 平面内. 定义 B 为双曲线轨道面和 B 平面的交线, 有

$$B = b\hat{B},$$

其中, b 为双曲线轨道半短轴, \hat{B} 为 B 的方向矢量.

以借力行星质心为原点, 单位矢量 \hat{S} , \hat{T} , \hat{R} 为轴, 在 B 平面上建立坐标系 S_{STR} . 从日心惯性坐标系 S_{SCI} 到 S_{STR} 的坐标转换矩阵

$$L_1 = [\hat{S} \ \hat{T} \ \hat{R}].$$

在探测器借力轨道面建立坐标系 S_{SWB} , 同样以借力行星质心为原点, 以单位矢量 \hat{S} , \hat{B} , \hat{W} 为轴, 其中, $\hat{W} = B \times \hat{S}$, 为借力双曲线轨道面法线方向矢量.

在 S_{SWB} 下, \hat{S} 轴绕 \hat{W} 轴旋转 δ 角即得到 \mathbf{v}_{∞}^{+} 的方向, 于是离开超越速度可以表示为

$$\mathbf{v}_{\infty}^{+} = v_{\infty} [\cos \delta \ 0 \ -\sin \delta]^T. \quad (8)$$

坐标系 S_{SWB} 是由 S_{STR} 绕轴 \hat{S} 转过 $-\gamma$ 角得到的, 故 S_{STR} 到 S_{SWB} 的坐标转换矩阵为

$$L_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & -\sin \gamma \\ 0 & \sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (9)$$

因此 \mathbf{v}_{∞}^{+} 在日心惯性坐标系下的投影分量可以表示为

$$\mathbf{v}_{\infty}^{+}|_{SCI} (L_2 L_1)^T \cdot \mathbf{v}_{\infty}^{+}|_{SWB}. \quad (10)$$

3 微分进化算法

微分进化算法 (DE) 是进化算法的一个分支. 作

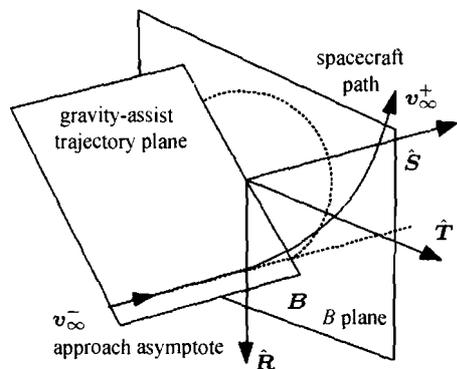


图 3 B 平面的定义

Fig. 3 Definition of B plane

为一种全局性随机优化方法, 其具有简单、快速、鲁棒性好等特点, 在参数优化问题中得到了广泛应用. 不同于其他进化算法的是, DE 引入了梯度的概念, 有效提高了搜索效率. 文献 [12] 通过分析遗传算法、微分进化算法、粒子群算法等多种全局优化算法的性能, 认为微分进化算法更适合于轨道优化问题.

假设整个飞行过程中共有 $N-2$ 次借力飞行, 日心转移段的个数为 $N-1$, 每个日心转移段有 1 次深空脉冲机动, 任务性能指标表示为

$$J(\mathbf{x}) = v_0 + \sum_{i=1}^{N-1} \Delta v_{d_i}. \quad (11)$$

根据上文分析可知, 方案设计的关键因素包括出发时间 T_0 , 逃逸速度 v_0 , 逃逸速度俯仰角 ϕ 和偏航角 φ , 借力时间 T_i ($i = 1, 2, \dots, N-1$), 借力飞行飞越高度 h_i , 辅助转角 γ_i , 深空机动时间 T_{d_i} 以及到达时间 T_i . 定义优化参数

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & [T_0, v_0, \phi, \varphi, T_1, \dots, T_{N-2}, \\ & h_1, \dots, h_{N-2}, \gamma_1, \dots, \gamma_{N-2}, \\ & T_{d_1}, \dots, T_{d_{N-1}}, T_{N-1}]^T. \end{aligned} \quad (12)$$

令 $T_{N-1} = T_i$, 深空机动时间 T_{d_i} 还可以表示为

$$\begin{aligned} T_{d_i} = & \sigma_{d_i}(T_{i+1} - T_i) = \sigma_{d_i} dt_i, \\ & i = 0, \dots, N-2, \end{aligned} \quad (13)$$

其中, σ_{d_i} 为深空脉冲机动时间因子, dt_i 为第 i 段日心转移轨道的飞行时间. 因此优化参数还可以定义为

$$\begin{aligned} \mathbf{x} = & [T_0, v_0, \phi, \varphi, dt_1, \dots, \\ & dt_{N-1}, h_1, \dots, h_{N-2}, \gamma_1, \dots, \\ & \gamma_{N-2}, \sigma_{d_1}, \dots, \sigma_{d_{N-1}}]^T. \end{aligned} \quad (14)$$

在借力行星处需要满足约束条件为 C3 匹配约束和超越速度转角约束, 即

$$|v_{\infty}^- - v_{\infty}^+| < \varepsilon, \quad (15)$$

$$\delta < \delta_{\max}. \quad (16)$$

其中, ε 为设定的小量. 根据以上分析, 将附加深空机动的借力飞行计算步骤归纳如下.

① 确定借力顺序, 按照出发、借力、到达行星的顺序设置行星序列以及优化变量的取值范围.

② 根据出发时速度位置矢量, 轨道递推至 T_{d_1} , 得到第一次深空机动前探测器的 \mathbf{r}_{d_1} 和 $\mathbf{v}_{d_1}^-$.

③ 求解第一次脉冲至第一次借力点的 Lambert 问题, 得到 $\Delta \mathbf{v}_d$ 以及第一次借力的 $\mathbf{v}_{\infty_1}^-$. 令 $i = 1$.

④ 求解第 i 颗借力点到第 $i+1$ 个借力点间 Lambert 转移轨道, 得到在第 i 颗行星处的 $\mathbf{v}_{\infty_i}^+$.

⑤ 判断在第 i 颗借力行星处是否满足约束式 (15)~(16). 如果满足, 转步骤③.

⑥ 由式 (10) 得到第 i 次借力后 $\mathbf{v}_{\infty_i}^+$. 轨道递推至下一次深空机动时刻 $T_{d(i+1)}$, 得到 $\mathbf{r}_{d(i+1)}$ 和 $\mathbf{v}_{d(i+1)}^-$.

⑦ 求解从 $\mathbf{r}_{d(i+1)}$ 到第 $i+1$ 颗行星间日心转移轨道的 Lambert 问题, 得到 $\Delta \mathbf{v}_{d(i+1)}$ 以及 $\mathbf{v}_{\infty(i+1)}^-$, $i = i+1$, 转步骤③, 直至 $i = N-1$.

4 算例

以木星探测借力飞行轨道为例, 忽略地球逃逸段, 选择 VEE, VEME 和 VEVE 三种借力方案进行优化. 初始条件和参数范围列于表 1. 设置逃逸速度范围为 $2 \sim 4 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$. 金星和地球的飞越安全高度分别为 200 km, 300 km, $\gamma_i \in [-180^\circ, 180^\circ]$. 由于金星在地球轨道内侧, 故设置 $\phi \in [-30^\circ, 30^\circ]$, $\varphi \in [-90^\circ, 0^\circ]$. 机动时间因子 $\sigma \in [0, 1]$, 出发时间和各个日心转移段的飞行时间设置见表 1.

设置种群个数为 300, 迭代代数最大为 300, 最小为 100, 步长因子为 $[-1.5, 1.5]$, 交叉因子为 0.95. 表 2 中列出了 VEE 方案的优化结果.

VEE 方案的优化轨道如图 4 所示. 从图 4 可以看出, 在地球出发不久后需要一次非常小 ($10^{-5} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 量级) 的深空机动.

对 VEME 方案在 2023 年上半年的发射窗口进行搜索. 设定种群数量为 800, 优化代数在 200~300 之间, 步长因子和交叉因子设置不变. 得到 VEME 方案的优化结果如图 5 所示.

该优化方案在转移过程中, 需要在地球至金星转移过程中施加一次很小的脉冲机动 ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 量级), 在金星至地球转移过程中施加一次 $100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ 量级的脉冲机动 (见表 3).

搜索 2026 年 7 月至 9 月间的 VEVE 方案发射

窗口 (见图 6), 设置种群数量 900, 迭代代数最小为 200, 最大为 300. 得到优化方案的结果列于表 4. 该优化方案在转移过程中, 需要在地球至金星转移过程中施加一次很小的脉冲机动 ($\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 量级).

VEE 方案的飞行时间约为 5.83 a, VEME 约

为 6.25 a, 而 VEVE 则需要 6.43 a. 虽然 VEME 方案在 VE 转移轨道段需要施加 $430\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ 左右的脉冲机动, 但是逃逸速度和捕获速度都是最小的. 因此, 从燃料消耗和探测目标科学回报的角度来看, VEME 方案较优.

表 1 木星探测借力飞行初始设置

Table 1 Parameters of VEE swing-by to Jupiter

scheme	parameters T_0/UTGC	initial settings/day			
		dt_1	dt_2	dt_3	dt_4
VEE	2020 年 2—5 月	100~200	250~350	700~900	—
VEME	2023 年 5—7 月	100~200	250~350	100~200	500~700
VEVE	2026 年 7—9 月	150~250	600~700	1000~1200	1500~1700

表 2 木星 VEE 借力优化结果

Table 2 Optimization results of VEE swing-by

事件	时间 (UTC)	速度/ $(\text{km}\cdot\text{s}^{-1})$
离开地球	2020-03-03	3.6009 (逃逸)
金星借力	2020-06-25	2.8295 (增量)
地球借力	2021-04-24	6.0118 (增量)
第 2 次地球借力	2023-07-29	6.8921 (增量)
到达木星	2026-01-01	7.5797 (捕获)

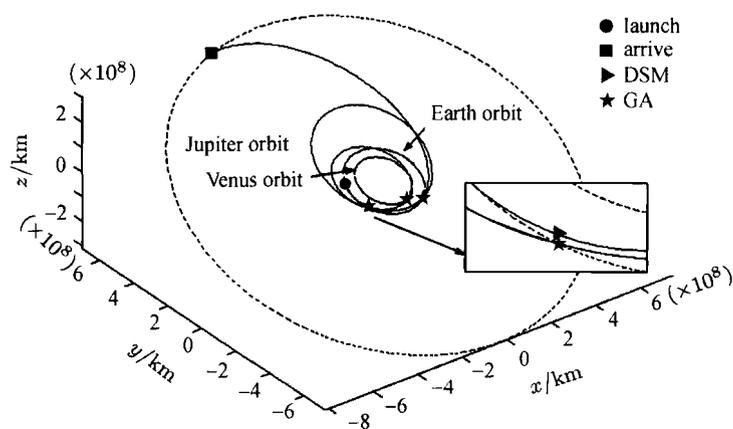


图 4 VEE 借力轨道

Fig. 4 Trajectory plot for VEE swing-by

表 3 木星 VEME 借力优化结果

Table 3 Optimization results of VEME swing-by

事件	时间 (UTC)	速度/($\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$)
离开地球	2023-05-30	3.0000 (逃逸)
第 1 次深空机动	2023-07-19	0.0058 (增量)
金星借力	2023-10-23	3.6792 (增量)
第 2 次深空机动	2023-11-19	0.4306 (增量)
地球借力	2024-09-04	6.7579 (增量)
火星借力	2025-02-10	1.7861 (增量)
第 2 次地球借力	2026-11-27	4.8722 (增量)
到达木星	2029-08-28	6.8827 (捕获)

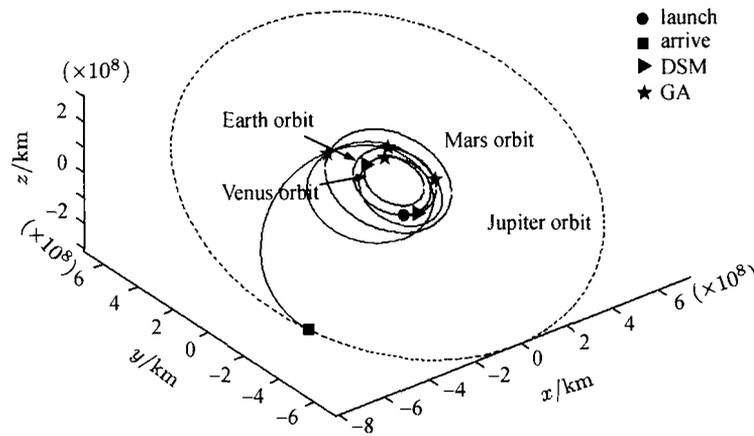


图 5 VEME 借力轨道

Fig. 5 Trajectory plot for VEME swing-by

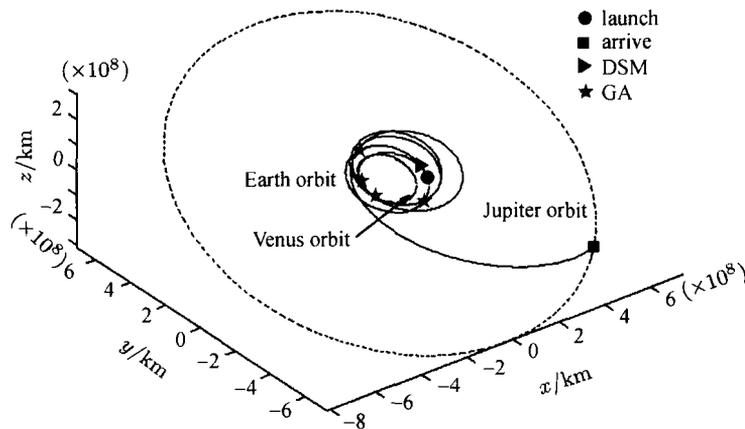


图 6 VEVE 借力轨道

Fig. 6 Trajectory plot for VEVE swing-by

表 4 木星 VEEV 借力优化结果

Table 4 Optimization results of VEEV swing-by

事件	时间 (UTC)	速度/(km·s ⁻¹)
离开地球	2026-09-01	3.3986 (逃逸)
第 1 次深空机动	2026-09-25	0.0013 (增量)
第 1 次金星借力	2027-02-14	6.0215 (增量)
第 1 次地球借力	2028-07-19	1.1126 (增量)
第 2 次金星借力	2029-07-05	3.6407 (增量)
第 2 次地球借力	2031-01-01	6.0147 (增量)
到达木星时间	2033-02-03	7.9621 (捕获)

5 结语

主要研究了附加深空机动的借力飞行轨道设计优化方法. 通过对借力飞行问题进行三维建模, 利用 B 平面确定借力飞行轨道平面, 解析推导了离开超越速度矢量, 利用深空机动脉冲实现了日心转移轨道段的拼接, 建立优化模型, 给出优化参数, 优化性能指标及计算流程. 进而对木星探测的 VEE, VEME, VVEE 三种借力方案进行优化, 利用全局搜索算法得到的结果可以作为最优控制理论的求解初值, 得到最优深空转移轨道.

参考文献

- [1] Soldner J K, Stancati M L, Feingold H, et al. Galilean satellite mission concepts [C]//Astrodynamics Conference. San Diego: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1982
- [2] Balogh A, Gonzalez-Esparza J, Forsyth R, et al. Interplanetary shock waves: Ulysses observations in and out of the ecliptic plane [J]. *Space Sci. Rev.*, 1995, **72**(1):171-180
- [3] Wenzel K, Marsden R, Page D, et al. The Ulysses mission [J]. *Astron. Astrophys.*, 1992, **92**(2):207-219
- [4] Jaffe L, Herrell L. Cassini/Huygens science instruments, spacecraft, and mission [J]. *J. Spacecr. Rocket.*, 1997, **34**(4): 509-521
- [5] Matson D, Spilker L, Lebreton J. The Cassini/Huygens mission to the Saturnian system [J]. *Space Sci. Rev.*, 2002, **104**(1):51-58
- [6] Broucke R. The celestial mechanics of gravity assist, 1988 [C]//AIAA/AAS Astrodynamics Conference. Minneapolis: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1988. 69-78
- [7] Breakwell J V, Lawrence M P. Matched asymptotic expansions, patched conics and the computation of interplanetary trajectories [R]. AIAA65-689,1965
- [8] Casalino L, Colasurdo G, Pastrone D. Simple strategy for powered swing-by [J]. *J. Guid. Contr. Dyn.*, 1999, **22**(1):156-159
- [9] Prado A, Broucke R. Effects of atmospheric drag in swing-by trajectory [J]. *Acta Astron.*, 1995, **36**(6):285-290
- [10] Bonfiglio E, Longuski J. Automated design of aerogravity-assist trajectories [J]. *J. Spacecr.*, 2000, **36**(6):768-775
- [11] Qiao Dong. Study of transfer trajectory design method for deep space exploration and application to small body exploration [D]. Harbin: Harbin Institute of Technology, 2006. In Chinese (乔栋. 星际探测中的小推力转移轨道设计与优化方法研究 [D]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学, 2007)
- [12] Conway B A. Spacecraft Trajectory Optimization [M]. Cambridge: Cambridge University Press, 2009