doi: 10.7522/j.issn.1000-0240.2013.0020

Yin Xiaowen, Fu Qiang, Ma Kunlin. Study of the nonlinear mathematical model for triaxial creep of frozen soil [J]. Journal of Glaciology and Geocryology, 2013, 35(1): 171-176. [尹晓文,傅强,马昆林. 冻土三轴蠕变非线性数学模型研究[J]. 冰川冻土, 2013, 35(1): 171-176.]

## 冻土三轴蠕变非线性数学模型研究

## 尹晓文<sup>1</sup>,傅 强<sup>2</sup>,马昆林<sup>2</sup>

(1. 青岛理工大学(临沂) 土建工程系, 山东 临沂 273400; 2. 中南大学 土木工程学院, 湖南 长沙 410075)

摘 要:采用 MTS-810 液压伺服材料试验机,对人工配制的冻黏土试件进行了三轴蠕变试验,获得了 冻黏土在复杂应力状态下的蠕变曲线.结果表明:冻土的蠕变变形具有较强的温度敏感性,温度越高, 这种温度敏感性越强;相同温度下,荷载越大,变形越大.运用相关理论,推导了冻黏土在复杂应力状 态下的三轴蠕变非线性数学模型,采用 MATLAB 软件的数据拟合功能得到了模型方程参数的数值, 模型参数与温度之间存在密切关系,建立了二者之间的数学表达式.冻土三轴蠕变非线性数学模型的 曲线与试验曲线拟合精度较高,建立的数学模型可以精确体现冻土的蠕变规律,能够为实际冻土工程 的变形发展预测提供有效的理论指导.

关键词: 冻黏土; 蠕变; 温度敏感性; 非线性数学模型; 参数 中图分类号: TU411 文献标识码: A

0 引言

冻土是指温度在 0 ℃或 0 ℃以下,并含有冰的 土壤,是由土矿物颗粒、孔隙水、未冻水和气组成 的结构复杂的多相颗粒体系.受其中特有的冰胶结 作用的制约,使冻土的力学行为比普通土壤复杂得 多<sup>[1-2]</sup>.因此,正确合理地研究冻土的变形特性, 尤其是冻土的流变性质,对于准确预报冻土地基及 冻土结构物的变形破坏具有十分重要的意义.

冻土作为一种特殊土体,其变形特性与温度、 外力、作用时间等密切相关,国内外众多学者对此 进行了大量的研究工作.马小杰等<sup>[3]</sup>研究了高温-高含冰量冻土的蠕变特性,得到了高温-高含冰量 冻结黏土单轴压缩蠕变方程、应力-应变关系和长 期强度方程的参数.邴慧等<sup>[4]</sup>通过试验研究了土体 冻结温度与含盐量和含水量的关系.赵淑萍等<sup>[5-7]</sup> 通过动、静荷载作用下冻结粉土的蠕变试验,对冻 结粉土的动静蠕变特征进行了比较,并研究了长期 动荷载作用下冻结粉土的变形和强度特征;同时, 通过分析不同试验条件下的蠕变过程曲线,探讨了 冻结砂土在动荷载下的蠕变模型,分析了最大加载 应力、温度及加载频率对冻土蠕变破坏应变、破坏 时间和最小蠕变速率的影响.基于蠕变试验资料, Fish<sup>[8]</sup>及 Zhu Yuanlin 等<sup>[9]</sup>提出了冻土的热力学应 力-应变关系;罗汀等<sup>[10]</sup>利用冻土的三轴试验结果, 研究得到了适用于冻土的广义非线性强度准则.任 何土体在变形过程中必然伴随着损伤特性,对冻土 损伤特性的研究可以得到其内部细观结构的变化机 理对宏观变形影响的统计描述.李志敏<sup>[11]</sup>和李栋 伟等<sup>[12-13]</sup>基于能量耗散理论和统计损伤理论以及 相应的蠕变试验建立了冻土的损伤本构关系,提高 了从理论上研究冻土变形破坏的准确性.

冻土的变形具有较强的温度敏感性,在冻土蠕 变模型的研究中应重点考虑温度效应的影响作用. 本文基于不同温度下冻土的蠕变变形特征,建立了 冻土的非线性蠕变数学模型,该模型充分考虑了温 度因素的作用,具有较高的拟合精度.

1 冻土三轴蠕变试验研究

1.1 试验方法

本次试验采用 MTS-810 液压伺服材料试验机, 围压和轴压可同步控制,最大轴向输出荷载为 100

**收稿日期:** 2012-08-11; 修订日期: 2012-11-25

基金项目:国家自然科学基金项目(50978131)资助

作者简介: 尹晓文(1985—), 男, 山东临沂人, 讲师, 2011 年在辽宁工程技术大学获硕士学位, 现主要从事岩土工程方面的研究工作. E-mail: 407064707@qq. com

kN,最大围压为 40 MPa,试验过程通过计算机全 自动控制. 轴向变形通过轴位移变化由轴压系统自 动测量,体积变化通过压力室油量变化由围压系统 直接测量,配合环境温度箱可对冻土进行不同温度 下的三轴蠕变试验.

为使试验结果准确、可靠,充分反映冻土的流 变力学本质,试验采用人工配制的冻黏土试件.采 用控制击实功能的办法将人工冻黏土试件加工成直 径为 50 mm, 高度为 100 mm 的标准试件, 击锤重 量为 300 g, 击实高度为 265 mm, 击落次数为 100 次,使各试件容重保持为 17.1~17.3 kN·m<sup>-3</sup>, 冻黏土含水率为 34%.采用低温快速单向冻结的方 法,使试件内部的结晶冰均匀分布而不致形成大的 冰棱体.

试验在 4 种不同温度 ( $\theta$  = −5 °C、−8 °C、 -11 ℃、-14 ℃)下进行,采用的应力水平如表 1 所示,使每个试件所受的平均法向应力 σ<sub>m</sub>保持不 变,而应力偏张量  $S_{ii}$ 、应力偏张量第二不变量  $J_2$ 各 不相同. 试验过程中详细记录温度、轴压、围压、 轴向变形和体积变形.

表1 试验应力水平 Table 1 Applied stress levels

轴压 /MPa	围压 /MPa	σm / MPa	$S_{11}$ /MPa	$S_{22} = S_{33}$ /MPa	J₂ ∕MPa
4.750	2.875	3.500	1.250	0.625	1.172
5.000	2.750	3.500	1.500	0.750	1.688
5.250	2.625	3.500	1.750	0.875	2.297
5.500	2.500	3.500	2.000	1.000	3.000

### 1.2 试验结果及分析

试验结果如图 1~4 所示. 冻土的蠕变均分为 两个阶段,即衰减蠕变阶段和非衰减蠕变阶段,变 形速率逐渐减小的阶段为衰减蠕变阶段,变形速率 几乎保持不变的阶段为非衰减蠕变阶段. 在较高温 度和较高应力偏量作用下,冻土在较短时间内便进 入渐进流阶段,且变形表现出明显的温度敏感性, 随着温度的降低和应力偏量的减小,冻土对温度的 敏感性降低. 在相同应力偏量作用下, 温度越高, 变形越大.因为,在较高温度情况下,冻土中所含 有的未冻水含量增加,土体的孔隙率增大,从而使 冻土的抗压强度减小;在相同温度情况下,随着应 力偏量的等幅增加,变形的增幅越来越大,且冻土 具有明显的瞬时变形,不可忽略.





冻土的蠕变变形是瞬时变形的数倍,具有明显 的流变特性.冻土内部存在未冻水和冰,冰是一种 理想的流变体,在很小的荷载作用下便会产生塑性 流变,因此,冻土具有明显的流变特性.未冻结的 薄膜水在任意载荷作用下都会促发流变的发展.

### 2 非线性数学模型的研究

许多研究者对各种冻土进行大量的蠕变试验结 果表明,即使在单轴应力状态下,冻土也呈现出一 种明显的非线性黏弹性的材料状态<sup>[14]</sup>.其在单轴 应力条件下第Ⅰ、Ⅱ蠕变阶段的变形规律,维亚洛 夫等提出如下关系<sup>[15]</sup>,即

$$\varepsilon(t) = A(\theta)\sigma^{m}\varphi(t) \tag{1}$$

式中: $\epsilon(t)$ 为蠕变变形;t为应力作用时间; $A(\theta)$ 为 取决于温度和材料的参数;m为应力与应变的非线 性指数; $\varphi(t)$ 为时间函数.

通过大量的试验表明,时间函数  $\varphi(t)$ 实际反映的是冻土蠕变过程中应变和时间之间的关系,以往相关研究通常采用幂函数的形式来表达<sup>[15]</sup>.由图 1  $\sim$ 4 的试验结果可知,负指数函数的形式更能精确体现二者之间的关系.因此,本文采用下式进行描述.

$$\varphi(t) = a(1 - e^{-bt}) \tag{2}$$

式中:a,b为试验参数.

将式(2)代入式(1)可得

$$\dot{\varepsilon}(t) = A(\theta)a(1 - e^{-bt})\sigma^m \tag{3}$$

将上式对时间求导,可得应变速率为:

$$\varepsilon(t) = A(\theta)abe^{-bt}\sigma^m \tag{4}$$

出的应变速率张量与应力偏张量及其第二不变量的 关系,即:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} = f(\boldsymbol{J}_2)\boldsymbol{S}_{ij} \tag{5}$$

式中: $S_{ij}$ 为应力偏张量; $J_2$ 为应力偏张量第二不变量.

# 在三轴应力状态下,二者可用下式表示,即 $S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma_2 - \sigma_1 - \sigma_3}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2\sigma_3 - \sigma_1 - \sigma_2}{3} \end{bmatrix}$ (6) $J_2 = \frac{1}{6} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]$ (7)

式中: $\sigma_1$ 为轴压(MPa); $\sigma_2 = \sigma_3$ 为围压(MPa).

为了获得函数  $f(J_2)$ 的具体形式,可通过将单 轴蠕变方程作为三轴蠕变方程的一个特例进行推 导,在单轴应力状态下, $\sigma_1 = \sigma > 0$ , $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ,所 以

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} \frac{2\sigma}{3} & 0 & 0\\ 0 & -\frac{\sigma}{3} & 0\\ 0 & 0 & -\frac{\sigma}{3} \end{bmatrix}$$
(8)

$$J_2 = \frac{1}{3}\sigma^2 \tag{9}$$

将式(8)、(9)代入式(5)可得:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ij} = f(\frac{1}{3}\sigma^2)(\frac{2}{3}\sigma) \tag{10}$$

通过方程(10)与方程(4)对比可得:

$$f(J_2) = \frac{3}{2} A(\theta) ab e^{-bt} (3J_2)^{\frac{m-1}{2}}$$
(11)

将上式代入式(5),并令 $\frac{2}{3}aA(\theta) = \overline{A}(\theta)$ ,所以,

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{ii} = \overline{A}(\theta) b e^{-bt} (3J_2)^{\frac{m-1}{2}} S_{ii} \tag{12}$$

将上式积分可得冻土在复杂应力状态下的非线 性蠕变数学方程,即:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{ij} = \overline{A}(\theta) \left(1 - e^{-bt}\right) \left(3J_2\right)^{\frac{m-1}{2}} S_{ij} \tag{13}$$

三轴应力状态下,试验过程中测得冻土的体积 变形近似为 0,考虑初始瞬时变形,于是可得:

$$e_{ij} = \frac{S_{ij}}{2G} + \overline{A}(\theta) (1 - e^{-bt}) (3J_2)^{\frac{m-1}{2}} S_{ij} \quad (14)$$

式中: $e_{ij}$ 为应变偏张量;G为三轴剪切模量(MPa).

式(14)即为冻土在三轴应力状态下的负指数型 非线性蠕变数学方程.

±

冰

将蠕变方程的系数视为未知参数,时间作为自 变量,变形作为时间的函数,结合试验数据,利用 MATLAB软件的数据拟合功能便可得到蠕变方程 各参数的具体数值,如表 2 所示.

表 2 蠕变方程参数

Table 2Parameters of the creep equations

$\theta$ °C	$S_{11}/\mathrm{MPa}$	G/MPa	$\overline{A}(\theta)/10^{-2}$	m	$b/\min$
-5	1.250	22.727	0.2923	5.8029	0.0106
	1.500	18.293	0.1459	6.1428	0.0088
	1.750	14.583	0.0766	6.2886	0.0070
	2.000	10.638	0.0371	6.3421	0.0058
代表值		16.560	0.1380	6.1441	0.0081
-8	1.250	29.070	0.2837	5.7498	0.0208
	1.500	23.006	0.1286	6.0169	0.0115
	1.750	16.114	0.0613	6.1840	0.0086
	2.000	11.561	0.0362	6.2261	0.0069
代表值		19.938	0.1275	6.0442	0.0120
-11	1.250	37.425	0.2683	5.6890	0.0199
	1.500	24.971	0.1267	6.0129	0.0093
	1.750	17.785	0.0524	5.9679	0.0080
	2.000	12.626	0.0329	6.1740	0.0061
代表值		23.202	0.1201	5.9610	0.0108
-14	1.250	55.804	0.2356	5.5301	0.0332
	1.500	27.985	0.1081	5.8580	0.0152
	1.750	19.488	0.0580	6.0012	0.0074
	2.000	14.472	0.0319	6.1694	0.0069
代表值		29.437	0.1084	5.8897	0.0157

在上述各参数中,每种荷载条件下对应的参数 随温度变化具有相同的变化规律,因此,取每种温 度下每个参数 4 个数值的均值作为此温度下的代表 值,以此研究蠕变参数  $G_{\chi}\overline{A}(\theta)$ 、m 随温度的变化 规律,蠕变参数 b反映了时间因素对蠕变变形的影 响,与温度无关.

蠕变参数 G 与温度的绝对值呈指数函数关系, 可用下式描述,即:

$$G = \delta e^{\gamma|\theta|} \tag{15}$$

式中: $\delta$ ,  $\gamma$ 为试验参数.其中, $\delta$ =12.025, $\gamma$ = 0.0626,复相关系数  $R^2$ =0.9921.

蠕变参数  $\overline{A}(\theta)$ 、*m* 与温度的关系可用下式表示,即:

$$\overline{A}(\theta) = \frac{1}{\omega(1+|\theta|)^k} \tag{16}$$

$$m = 1 + \beta \mid \theta \mid^n \tag{17}$$

式中: $\omega$ , k,  $\beta$ , n均为试验参数. 其中,  $\omega$  = 4. 6282; k=0. 2453;  $\beta$ =5. 5716; n=-0. 0488.

将各参数的数值代入蠕变方程,便可得到相应 应力状态下蠕变模型的拟合曲线,其与试验曲线的 对比如图 5~8 所示.



图 5 θ=−5 ℃条件下试验与模型曲线的对比

Fig. 5 Experimental and simulated creep curves( $\theta = -5$  °C)



图 6  $\theta = -8$  ℃条件下试验与模型曲线的对比 Fig. 6 Experimental and simulated creep curves( $\theta = -8$  ℃)

从试验与模型曲线的对比结果可以看出,二者 的拟合精度较高,在较高温度下的拟合精度低于低 温下的,高应力状态的拟合精度低于低应力状态 的.这是因为负指数型蠕变数学方程可以很好体现 蠕变变形的衰减蠕变阶段和稳定蠕变阶段,在较高 温度和较大应力状态下,冻土的蠕变变形迅速增 长,稳态蠕变并不明显.总体来看,本文建立的冻 土非线性蠕变数学模型可较好的体现冻土的蠕变特 征,可以为实际工程中冻土的变形预测提供相应的 理论参考.



creep curves( $\theta = -14$  °C)

### 3 结论

(1) 冻土具有明显的流变特性,其蠕变变形具 有较强的温度敏感性,温度越高,冻土的蠕变变形 越大;但随着温度和荷载的降低,冻土变形的温度 敏感性逐渐减弱.

(2)根据冻土流变理论建立的冻土非线性蠕变 数学模型可以有效表达冻土的蠕变特性,模型相关 参数与温度之间存在密切关系,建立了模型参数与 试验温度之间的数学表达式.

(3)通过模型曲线与试验曲线的对比可知,建 立的非线性蠕变数学模型可以合理体现冻土蠕变的 衰减蠕变阶段和稳定蠕变阶段,在实际应用中,可 以有效预测冻土工程的变形发展规律,防止意外事

#### 故的发生.

### 参考文献(References):

- Qi Jilin, Ma Wei. State-of-art of research on mechanical properties of frozen soils[J]. Rock and Soil Mechanics, 2010, 31 (1): 133-143. [齐吉琳, 马巍. 冻土的力学性质及研究现状 [J]. 岩土力学, 2010, 31(1): 133-143.]
- [2] Sun Xingliang, Wang Ren, Hu Mingjian. Meso-scopic mechanism analysis of deformation properties of frozen silty clay under triaxial shear[J]. Acta Mechanica Solida Sinica, 2005, 26(1): 62-66. [孙星亮, 汪稔, 胡明鉴. 三轴剪切条件下冻结粉质黏土变形特性的细观机理分析[J]. 固体力学学报, 2005, 26(1): 62-66.]
- [3] Ma Xiaojie, Zhang Jianming, Chang Xiaoxiao, et al. Experimental study on creep of warm and ice-rich frozen soil[J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2007, 29(6): 848-852. [马小杰,张建明,常小晓,等. 高温-高含冰量冻 土蠕变试验研究[J]. 岩土工程学报, 2007, 29(6): 848-852.]
- [4] Bing Hui, Ma Wei. Experimental study on freezing point of saline soil [J]. Journal of Glaciology and Geocryology, 2011, 33(5): 1106-1113. [邴慧, 马巍. 盐渍土冻结温度的试验研究[J]. 冰川冻土, 2011, 33(5): 1106-1113.]
- [5] Zhao Shuping, He Ping, Zhu Yuanlin, *et al.* Comparison between dynamic and static creep characteristics of frozen silt
  [J]. Chinese Journal of Geotechnical Engineering, 2006, 28 (12): 2160-2163. [赵淑萍,何平,朱元林,等. 冻结粉土的动静蠕变特征比较[J]. 岩土工程学报, 2006, 28(12): 2160-2163.]
- [6] Zhao Shuping, Ma Wei, Jiao Guide, *et al.* The features of strain and strength of frozen silt under long-time dynamic loading[J]. Journal of Glaciology and Geocryology, 2011, 33 (1): 144-151. [赵淑萍,马巍,焦贵德,等. 长期动荷载作用下冻结粉土的变形和强度特征[J]. 冰川冻土, 2011, 33 (1): 144-151.]
- [7] Zhao Shuping, He Ping, Zhu Yuanlin, et al. Creep characteristics of frozen sand under dynamic loading[J]. Journal of Glaciology and Geocryology, 2002, 24(3): 270-274. [赵淑萍,何平,朱元林,等. 冻结砂土在动荷载下的蠕变特征[J]. 冰川冻土, 2002, 24(3): 270-274.]
- [8] Fish A M. Kinetic nature of the long-term strength of frozen soils[C]//Proceedings of 2nd International Symposium on Ground Freezing. Trondheim: Norwegian Institute of Technology, 1980: 95-108.
- [9] Zhu Yuanlin, Carbee D L. Creep and Strength Behavior of Frozen Silt in Uniaxial Compression [R]. Hanover: USA Cold Regions Research and Engineering Laboratory, CRREL Report 87-10, 1987.
- [10] Luo Ting, Luo Xiaoying. Applications of generalized non-linear strength theory to frozen soil[J]. Journal of Glaciology and Geocryology, 2011, 33(4): 772-777. [罗汀,罗小映. 适用于冻土的广义非线性强度准则[J]. 冰川冻土, 2011, 33(4): 772-777.]
- [11] Li Zhimin. Study on Elastic-Plastic Damage Constitutive Model of Frozen Soil Based on Energy Dissipation Theory
   [D]. Master Thesis, Huainan: Anhui University of Science and Technology, 2003. [李志敏. 基于能量耗散理论的冻土

±

冰

弹塑性损伤本构模型研究[D].硕士论文,淮南:安徽理工大 学,2003.]

- [12] Li Dongwei, Wang Renhe. Frozen soil creep model based on statistical damage theory[J]. Chinese Journal of Applied Mechanics, 2008, 25(1): 133-136, 188. [李栋伟, 汪仁和. 基 于统计损伤理论的冻土蠕变本构模型研究[J]. 应用力学学 报, 2008, 25(1): 133-136, 188.]
- [13] Li Dongwei, Wang Renhe, Hu Pu. Study of frozen soil creep damage-coupling constitutive function[J]. Journal of Glaciology and Geocryology, 2007, 29(3): 446-449. [李栋伟, 汪 仁和, 胡璞. 冻黏土蠕变损伤耦合本构关系研究[J]. 冰川冻 土, 2007, 29(3): 446-449.]
- [14] Chen Xiangsheng. Creep mathematic model of frozen clay and its application in China[J]. Journal of China Coal Society, 1995, 20(4): 399-402. [陈湘生. 我国人工冻结黏土蠕变数 学模型及应用[J]. 煤炭学报, 1995, 20(4): 399-402.]
- [15] Zhang Xiangdong, Zhang Shuguang, Li Yongjing, et al. Testing study on triaxial creep properties of frozen soil to determine thickness of frozen wall[J]. Chinese Journal of Rock Mechanics and Engineering, 2004, 23(3): 395-400. [张向东,张树光,李永靖,等. 冻土三轴流变特性试验研究与冻结 壁厚度的确定[J]. 岩石力学与工程学报, 2004, 23(3): 395-400.]

### Study of the Nonlinear Mathematical Model for Triaxial Creep of Frozen Soil

YIN Xiao-wen<sup>1</sup>, FU Qiang<sup>2</sup>, MA Kun-lin<sup>2</sup>

(1.Civil Engineering Department, Qingdao Technological University, Linyi Shandong 273400, China;
 2.School of Civil Engineering, Central South University, Changsha Hunan 410075, China)

Abstract: The triaxial creep tests on laboratoryprepared frozen clay specimens are carried out with MTS-810 hydraulic servo material test machine, and then creep curves of frozen clay under complex stress state are obtained. The results show that the creep deformation of frozen soil has strong temperature sensitivity; the higher the temperature is, the stronger the temperature sensitivity is; at a same temperature, the larger the load is, the bigger the deformation is. Using relevant theory, the nonlinear mathematical model of triaxial creep of frozen clay under complex stress state is derived. Then equation's parameters of the model are obtained through fitting function of MATLAB software. There is a tight relationship between the model parameters and temperature. Thus a mathematical expression between the two is established. The fitting accuracies between the simulated curves and the experimental curves are high. The established mathematical model can accurately describe the creep law of frozen soil, and will provide effective theory for predicting the deformation in actual frozen soil engineering.

Key words: frozen clay; creep; temperature sensitivity; nonlinear mathematical model; parameter