

# 基于稳健加权总体最小二乘法的地面 三维激光扫描球型标靶定位

袁豹 岳东杰 赵元忆 李成仁

(河海大学测绘科学与工程系 南京市 210098)

**提要** 该文分析了地面三维激光扫描中球形标靶定位采用最小二乘法时存在的缺陷,利用了一种稳健的加权总体最小二乘方法进行球形标靶的定位。该方法以总体最小二乘为基础,在顾及所有观测数据存在误差的情况下,通过一定的准则剔除异常数据点,并依据扫描点三维坐标的计算方法,对数据矩阵进行了定权分析,从而获得稳健的球形标靶参数值。最后,依据实验数据,分析对比最小二乘方法、总体最小二乘方法和稳健加权总体最小二乘方法所得的结果,得到结论:稳健加权总体最小二乘法能够得到更为准确的标靶参数值,稳健性较好。

**关键词** 三维激光扫描 球形标靶 稳健加权总体最小二乘 点云 稳健性

## Spherical Target Positioning of Terrestrial 3D Laser Scanning Based on Robust Weighted Total Least Squares Method

Yuan Bao Yue Dongjie Zhao Yuanyi Li Chengren

(Department of Surveying and Mapping Science and Engineering, Hohai University)

**Abstract** The defects of spherical target positioning in the process of terrestrial 3D laser scanning with least squares method are analyzed, and a robust weighted total least squares method used for the position of spherical target is put forward. Based on the total least squares method, considering all the observational data errors, eliminating outlier data points through some criterions, and according to the method of calculating three-dimensional coordinates of scanning points, the weight analysis of data matrix is analyzed so the robust spherical target parameter values are obtained. Finally, based on experimental data, the results among least squares method, the total least squares method and the robust weighted total least squares method are analyzed and compared, the conclusions are obtained that the robust weighted total least squares method can gain more accurate parameters values of the spherical target, and the robust is good.

**Keywords** 3D laser scanning; spherical target; robust weighted total least squares; point cloud; robustness

## 1 引言

地面三维激光扫描是一种新型的空间数据获取技术,具有数据获取速度快、实时性强、数据量大、精度较高和主动性等特点,并能实现数据全数字特征、快速传输、加工和处理,所得的数据不仅包括物体目标的三维坐标信息,而且包含物体表面的光学

特征信息<sup>[1]</sup>。所以三维激光扫描技术又被称为“实景复制技术”。

在获取物体表面点云数据时,由于扫描仪的视场角有限以及扫描物体间的遮挡,需要在不同视点下进行扫描,这其中较为重要的问题之一就是将不同视点下的点云数据转换到同属一个坐标系统下,即点云数据的配准问题。解决这一问题常用的方法之一就是标靶法,分为平面标靶和球形标靶。本文研究球形标靶的定位问题。标靶法的思路就是在被扫描物体的周围及扫描仪单站视点边缘处布设一系列直径已知的白色球状物,在每一视点进行扫描

基金项目:国家自然科学基金资助项目(51079053)

作者简介:袁豹(1988-)男,硕士研究生,研究方向为大地测量与测量工程专业数据处理。

收稿日期:2012-06-18

操作时 要求扫描范围内至少有3个不在同一直线上的标靶球<sup>[2]</sup>。依据扫描获得的球形标靶的表面数据(半球面)采用球面拟合的方法确定标靶球的球心坐标 随后 即可利用不同视点下的公共球标靶的球心坐标作为控制点 进行不同坐标系的转换 实现点云配准。

现阶段,一般生产三维激光扫描仪的厂家都会提供相应软件,可以实现球标靶的球心坐标计算,这些方法的基础是最小二乘(Least Squares,LS)方法,而实际扫描获得的点云数据,难免存在粗差以及偶然误差等,这样最小二乘得出的结果就是不稳定的,最小二乘认为系数矩阵为常数这一做法是不符合实际情况的,由于点云数据的采集条件相同及异常数据的存在,系数矩阵必然存在偶然误差,且在考虑使用总体最小二乘(Total Least Squares,TLS)方法<sup>[3]</sup>时要先进行异常数据的剔除。考虑到点云数据的三维坐标中x,y,z分量的计算方法不同以及不同数据点之间的采集环境不同,则数据精度不相等,应该采用加权总体最小二乘方法来求解球标靶的球心坐标参数,故本文利用一种稳健的加权总体最小二乘(Robust Weighted Total Least Squares,RWTLS)方法来拟合球形标靶,得到较为准确的球心坐标参数,为后续点云配准及建模处理等工作提供精度保障。

## 2 总体最小二乘法球标靶定位模型

球形标靶的形状特点是无论激光光束从任何方向入射到标靶,都能获得半个球面的点云数据。依据点云数据进行球形标靶的拟合,即从点云数据中挑选出有关球体的一组数据( $x_i, y_i, z_i$ )( $i = 1, 2, \dots, n$ )利用球面拟合算法确定球心的坐标<sup>[4]</sup>。一般球形标靶的半径在出厂时是已知的,但是为了检验拟合方法的准确性,这里认为球形标靶的半径为未知参数值。

空间球面方程为:

$$(x - a_0)^2 + (y - b_0)^2 + (z - c_0)^2 = r^2 \quad (1)$$

式中  $a_0, b_0, c_0$  为球心坐标,  $r$  为球半径  $x, y, z$  是采用三维激光扫描仪获得的空间三维球面观测坐标。将球面方程展开可以得到:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2xa_0 + 2yb_0 + 2zc_0 + r^2 - a_0^2 - b_0^2 - c_0^2 \quad (2)$$

将  $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 2z$  看作为方程的观测值,  $a_0, b_0, c_0, r^2 - a_0^2 - b_0^2 - c_0^2$  为待估参数。运用总体最小二乘的思想,则球面方程写成矩阵形式为:

$$\begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 & 1 \\ 2x_2 & 2y_2 & 2z_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2x_n & 2y_n & 2z_n & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ r^2 - a_0^2 - b_0^2 - c_0^2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\text{其中 } L = \begin{bmatrix} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 \\ x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n^2 + y_n^2 + z_n^2 \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 2x_1 & 2y_1 & 2z_1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2x_n & 2y_n & 2z_n & 1 \end{bmatrix}, X = \begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \\ r^2 - a_0^2 - b_0^2 - c_0^2 \end{bmatrix},$$

则考虑矩阵  $A$  与  $L$  都含有误差的总体最小二乘模型为:

$$\begin{aligned} L + e_L &= (A + E_A) \cdot X \\ [e_L] &= \left[ \begin{array}{c} e_L \\ \text{vec}(E_A) \end{array} \right] \sim \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \sigma_0^2 \begin{bmatrix} I_L & 0 \\ 0 & I_A \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

平差准则为:

$$\text{vec}(E_A)^T \text{vec}(E_A) + e_L^T e_L = \min \quad (5)$$

采用奇异值分解或是迭代解算方法即可求出参数(球心坐标)值。

## 3 稳健加权总体最小二乘法

### 3.1 异常数据的剔除

实际采用三维激光扫描仪对研究物体进行扫描时,由于多种因素的影响,如行人、车辆通过,树木、建筑等的遮挡等,必然使得采集到的数据点存在粗差,即数据存在异常值<sup>[5]</sup>。因此首先要进行数据的预处理,剔除异常数据点。

数据剔除采用如下方法进行:

1) 首先利用总体最小二乘法初步计算出参数  $a_0, b_0, c_0, r$  的初值;

2) 根据计算出的参数  $a_0, b_0, c_0, r$  的值,计算散点到拟合球面的垂直距离如下:

$$d_i = |\sqrt{(x_i - a_0)^2 + (y_i - b_0)^2 + (z_i - c_0)^2} - r| \quad (6)$$

3) 利用公式:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\left( d_i - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d_i \right)^2}{n-1}} \quad (7)$$

计算散点到球面距离  $d_i$  的标准差  $\sigma$ 。

4) 比较每个距离  $d_i$  与标准差  $\sigma$ ,若  $d_i > 2\sigma$ ,则

认为此点为异常点 进行删除处理; 反之 则保留。

### 3.2 加权总体最小二乘的模型

地面三维激光扫描所得的点云数据坐标系为独立空间直角坐标系 坐标原点  $O$  定义为扫描仪中心位置,  $Y$  轴为仪器初始化时的固定方向  $Z$  轴竖直向上并且垂直于  $Y$  轴, 按右手螺旋法则确定  $X$  轴垂直于  $YOZ$  平面。激光束测量目标点斜距 的同时, 测量出激光束的水平角  $\varphi$  和竖直角  $\theta$ , 得到目标相对于仪器中心  $O$  的三维坐标( $x$   $y$   $z$ ) 为:

$$\begin{cases} x = S \cos \theta \cos \varphi \\ y = S \cos \theta \sin \varphi \\ z = S \sin \theta \end{cases} \quad (8)$$

从上式可以看出 参与  $x$   $y$   $z$  计算的元素不同, 由于仪器测角误差和测距误差的存在, 则必然导致坐标元素  $x$   $y$   $z$  的精度不同, 故应采用加权总体最小二乘方法建立球形标靶拟合模型。加权总体最小二乘模型为:

$$\begin{aligned} L + e_L &= (A + E_A) \cdot X \\ \begin{bmatrix} e_L \\ e_A \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} e_L \\ \text{vec}(E_A) \end{bmatrix} \sim \left( \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \sigma_0^2 \begin{bmatrix} Q_L & 0 \\ 0 & Q_A \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (9)$$

平差准则为:

$$e_L^T P_L e_L + e_A^T P_A e_A = \min \quad (10)$$

其中  $Q_L$  和  $Q_A$  分别为  $e_L$  和  $e_A$  的对称非负定协因数阵,  $\sigma_0^2$  是待估计的单位权方差,  $P_L = Q_L^{-1}$ ,  $P_A = Q_A^{-1}$ ,  $e_A = \text{vec}(E_A)$ ,  $P_L$  和  $P_A$  分别为观测值  $L$  和  $A$  所对应的观测量之间的两个权阵。定义  $P_A = P_0 \otimes P_X$ ,  $P_0$  为系数矩阵  $A$  的列向量权阵,  $P_X$  为系数矩阵  $A$  的行向量权阵,  $P_0 = Q_0^{-1}$ ,  $P_X = Q_X^{-1}$ 。

### 3.3 权阵的确定

从上述模型可以看出, 只要确定协因数阵  $Q_0$ ,  $Q_X$ ,  $Q_L$  即可确定矩阵的权阵。因为列向量权阵  $P_0$  表示系数矩阵  $A$  列与列之间的关系, 而行向量权阵  $P_X$  则表示系数矩阵  $A$  各行元素之间的权关系。设扫描仪测距精度为  $\sigma_s$ , 测角精度为  $\sigma_\beta$ , 根据公式(8) 按照误差传播定律, 先对式(8) 进行全微分处理, 可以得出数据  $x$   $y$   $z$  的相对精度关系。此处因为点云数据为分布在球形标靶表面的数据, 故这些数据点的水平角和竖直角可以近似认为相等且作为小角度处理, 认为距离相同。则可以近似推导出矩阵  $Q_0 = \text{diag}(1/\sin\theta, 1/\cos\theta, 1, 0)$ ,  $\theta$  角的值由点云平均竖直角确定。对于不需要修正的第 4 列向量对应的权值为 0, 这样在平差中权值为 0 的第 4 列不参与平差, 其改正数为 0, 固定了常数列。分析系数矩阵  $A$ , 发现每一行数据格式相同, 由于这里球形标靶点云数据( $x_i$   $y_i$   $z_i$ ) 相对集中, 所受外界环境影响相同, 可以认为数据点之间是独立同精度的, 故定义  $Q_X = I_n$ 。再讨论观测矩阵  $L$ , 通过协因数传播率可得  $Q_L = (x^2 + y^2 + z^2) Q_X$ , 则有:

$$Q_L = \text{diag}(4(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2), 4(x_2^2 + y_2^2 + z_2^2), \dots, 4(x_n^2 + y_n^2 + z_n^2)) \quad (11)$$

### 3.4 解算方法及精度评定

针对加权总体最小二乘问题, 现阶段主要采用基于拉格朗日乘数法的迭代解算方法<sup>[6]</sup>, 计算步骤如下:

1) 给定初值  $v^{(0)} = 0$ ,  $\hat{X}^{(0)} = N^{-1}c$ ,  $[N, c] = A^T P_L [A, L]$ , 求解参数初始值:

$$\hat{X}^{(1)} = (A^T(Q_L + ((\hat{X}^{(0)})^T Q_0 \hat{X}^{(0)}) \cdot Q_X)^{-1} A) \cdot A^T(Q_L + ((\hat{X}^{(0)})^T Q_0 \hat{X}^{(0)}) \cdot Q_X)^{-1} L$$

2) 迭代求解拉格朗日乘系数:

$$\lambda^{(i)} = (Q_L + ((\hat{X}^{(i)})^T Q_0 \hat{X}^{(i)}) \cdot Q_X)^{-1} \cdot (L - A \hat{X}^{(i)})$$

迭代求解中间变量:  $v^{(i)} = (\lambda^{(i)})^T Q_X \lambda^{(i)}$ ,

迭代求解参数:

$$\begin{aligned} \hat{X}^{(i+1)} &= (A^T(Q_L + ((\hat{X}^{(i)})^T Q_0 \hat{X}^{(i)}) \cdot Q_X)^{-1} A - \\ &\quad v^{(i)} \cdot Q_0)^{-1} A^T(Q_L + ((\hat{X}^{(i)})^T Q_0 \hat{X}^{(i)}) \cdot \\ &\quad Q_X)^{-1} L \end{aligned}$$

3) 给定迭代限差  $\delta_0$ , 重复 2) 直到  $\|\hat{X}^{(k)} - \hat{X}^{(k-1)}\| \leq \delta_0$ , 并且计算单位权方差  $\hat{\sigma}_0^2$ , 观测值改正数  $e_L$  和系数阵改正数  $\hat{E}_A$ 。

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}_0^2 &= \lambda^T(L - A \hat{X}) / (n - 4) \\ e_L &= Q_L(Q_L + (\hat{X}^T Q_0 \hat{X}) \cdot Q_X)^{-1} \cdot (L - A \hat{X}) \\ \hat{E}_A &= -Q_X(Q_L + (\hat{X}^T Q_0 \hat{X}) \cdot Q_X)^{-1} \cdot (L - A \hat{X}) \hat{X}^T Q_0 \end{aligned} \quad (12)$$

## 4 实验及结果分析

本次实验采用 Trimble GX200 全功能扫描仪, 主要参数有 距离: 标准为 200m, 加长达 350m (w/ OverScan); 采样率: 最高达 5000 点/S; 扫描标准差: 1.4 mm, 距离  $\leq 50$ m 2.5mm, 距离  $\leq 100$ m 3.6mm, 距离  $\leq 150$ m 6.5mm, 距离  $\leq 200$ m; 目标捕获: 标准差  $< 1$ mm (Trimble 目标物)。因为球形标靶获取存在一定困难, 简化实验的同时, 采用地球仪模型作为球形标靶的代替 地球仪模型半径根据厂家提供, 半径分别为: 3cm 5cm 7cm, 模型如图 1 所示。



图 1 地球仪模型

标靶球 1 和 2 的点云数据不含有粗差, 而标靶球 3 的点云数据含有人为加入的粗差。首先对数据进行预处理 删除非标靶表面数据 采用稳健的数据剔除原则 对

数据进行粗差探测与删除,然后采用加权总体最小二乘法得到球形标靶拟合的参数和精度如表1所示。

扫描得到标靶点云数据散点如图2所示:

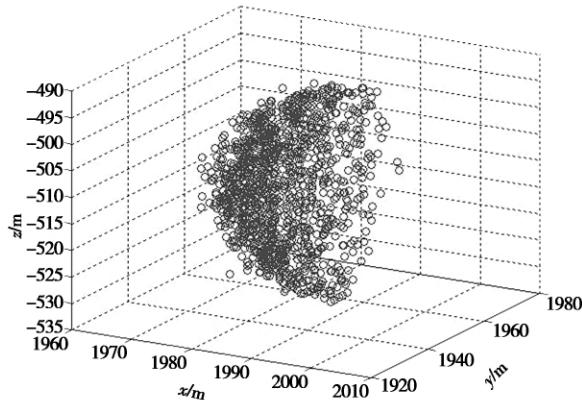


图2 球面点云

表1 标靶拟合结果

标靶	拟合方法	球标靶参数				拟合精度	$m$
		$a_0$	$b_0$	$c_0$	$r$		
1	LS	1982.483209	1971.729566	510.712943	0.030681	0.01647	
	TLS	1982.483411	1971.729002	510.712106	0.030484	0.00828	
	RWTLS	1982.483420	1971.729027	510.712138	0.030395	0.00623	
2	LS	1937.203981	1969.537402	510.389227	0.050921	0.01374	
	TLS	1937.203972	1969.537439	510.389244	0.050775	0.00794	
	RWTLS	1937.203896	1969.537468	510.389269	0.050493	0.00601	
3	LS	1949.578215	1970.741954	510.625045	0.070928	0.01808	
	TLS	1949.578270	1970.741965	510.625039	0.070753	0.00874	
	RWTLS	1949.578239	1970.741922	510.625064	0.070187	0.00338	

## 5 结论

1) 三维激光扫描获取的数据由于各种原因,不可避免的存在偶然误差和粗差等,应该采用总体最小二乘这种方法解决系数矩阵和观测矩阵同时存在误差的问题。

2) 针对数据的计算方法和来源不同,考虑不同数据之间的权关系,确定数据矩阵的权阵,采用加权总体最小二乘平差的方法。

3) 当数据存在粗差而又难以判定其具体个数时,应该采用一定的数据粗差剔除准则,文章利用一种稳健的加权总体最小二乘法对点云数据进行粗差探测与处理,得到了较准确的球形标靶定位。

4) 关于加权总体最小二乘中的定权问题以及处理粗差、系统误差等误差的其他方法,还需要进一步研究。

## 参考文献

- [1] 张毅,闫利,杨红,等.地面三维激光扫描的系统误差模型研究.测绘通报,2012,(1):16~19
- [2] 鲁铁定,周世健,张立亭,等.基于整体最小二乘的地面激光扫描标靶球定位方法.大地测量与地球动力学,2009,29(4):102~105
- [3] Golub G H, Van Loan C F. An analysis of the total least squares problem. SIAM J. Numer. Anal., 1980,17(6):883~893
- [4] 陈玮娴,陈义,袁庆,等.加权总体最小二乘在三维激光标靶拟合中的应用.大地测量与地球动力学,2010,30(5):90~95
- [5] 官云兰,周世健,张立亭,等.稳健整体最小二乘直线拟合.工程勘察,2012,(2):60~62
- [6] Schaffrin B and Wieser A. On weighted total least-squares adjustment for linear regression. Journal of Geodesy, 2008, 82: 415~421