第 30 卷第 1 期
2013 年 1 月
计 算 机 应 用 研 究
Application Research of Computers
Vol. 30 No. 1
Jan. 2013

基于辅助双正交的实值离散多 Gabor 变换*

胡学友[1]，李　锐[2]，陶　亮[2]
(1. 合肥学院 电子信息与电气工程系，合肥 230039；2. 安徽大学 计算智能与信号处理教育部重点实验室，合肥 230039)

摘　要：为了改善传统离散 Gabor 变换的时频分辨率，降低离散 Gabor 变换计算的复杂性，提出了一种基于多高斯窗的实值离散 Gabor 变换分析窗的快速求解算法。对多高斯窗下离散 Gabor 变换双正交关系式进行了简化，给出了分析窗组的代数方程表达式。该算法相对于多高斯 Gabor 展开的计算复杂度明显降低，仿真实验的结果也证明了该算法的有效性。

关键词：实值离散 Gabor 变换；离散多 Gabor 展开；时频分辨率；双正交
中图分类号：TP391　　**文献标志码：**A　　**文章编号：**1001-3695(2013)01-0111-03
doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2013.01.026

Multi-Gabor real discrete Gabor transforms based on auxiliary bi-orthogonal

HU Xue-you[1], LI Rui[2], TAO Liang[2]
(1. *Dept. of Electronics & Electrical Engineering, Hefei University, Hefei 230039, China*; 2. *Key Laboratory of Intelligence Computing & Signal Processing for Ministry of Education, Anhui University, Hefei 230039, China*)

Abstract: In order to improve the joint time-frequency resolution of the traditional discrete Gabor transform, and decrease computational complexity limits its practical application, this paper proposed a fast algorithm to computing the analysis window of real discrete Gabor transforms based on multi-Gaussian window, which could simplify the calculation process of the discrete Gabor transforms. It gave the discrete multi-Gabor expansion based on original bi-orthogonal function. The computational load of the proposed algorithm is far less than the discrete multi-Gabor algorithm. Experimental results also show the effectiveness of the proposed algorithm.

Key words: real-valued discrete Gabor transform; discrete multi-Gabor expansion(DMGE); time-frequency signal analysis resolution; original bi-orthogonal

Gabor 变换是重要的时频分析方法之一，其重要特点在于 Gabor 变换系数揭示了信号在时域与频域的局部化特性[1]。Gabor 变换的这个优点已被用于非平稳信号的时频分析、信号检测、图像压缩与识别以及线性时变系统建模等方面[2]。传统复值离散 Gabor 变换是单窗的，受限于固定的时频分辨率这一缺点。为了改善传统离散 Gabor 变换时频分辨率，国外学者提出了基于框架理论的多 Gabor 展开(DMGE)[3,4]，但其计算复杂度高；基于离散余弦变换和离散 Hartley 变换的实值离散 Gabor 变换的快速算法[5,6]，其变换系数与复值离散 Gabor 变换系数的实部和虚部有着非常简单的加减关系，可大大减少复值离散 Gabor 变换系数计算量；在重构信号实现的限制条件下采用固定分析窗和综合窗的 Gabor 变换同样计算量复杂[7]；利用 Gabor 的局部特征尺度进行特征提取[8]和目标识别[9]同样存在计算复杂度的问题。本文在文献[3]提出的离散多 Gabor 展开和文献[6]提出的快速算法基础上，提出辅助双正交多高斯窗的实值离散 Gabor 变换及其快速求解算法。

1　离散 Gabor 变换

设 $x(k)$ 为一个有限长或经过周期扩展的时间序列，其周期为 L。传统的单窗离散 Gabor 展开式定义为[1]

$$x(k)=\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}c(m,n)\,h(k-m\bar{N})\exp(j2\pi nk/N) \tag{1}$$

$$c(m,n)=\sum_{k=0}^{L-1}x(k)\,\gamma(k-m\bar{N})\exp(-j2\pi nk/N) \tag{2}$$

其中：$j=\sqrt{-1}$；$L=M\bar{N}=\bar{M}N$；M 和 N 分别为 Gabor 时间和频率的抽样点数；$\bar{M}$和$\bar{N}$分别为 Gabor 频率和时间的抽样间隔。式(1)和(2)分别为离散 Gabor 逆变换(即展开式)和离散 Gabor 变换，重建信号的条件是$\bar{N}\ \bar{M}\leqslant L$(或 $MN\geqslant L$)。临界抽样条件是 $L=M\bar{N}=\bar{M}N$，过抽样出现在 $MN>L$ 条件下，欠抽样条件($MN<L$)下会丢失信息使原信号无法还原。综合窗 $h(k)$、双正交分析窗 $\gamma(k)$ 也是周期为 L 的实序列。其中 $h(k)$ 和 $\gamma(k)$ 满足双正交约束条件即完备性约束条件：

$$\sum_{k=0}^{L-1}h(k+mN)\times\exp(j2\pi nk/\bar{N})\times\gamma(k)=\frac{L}{M\bar{N}}\delta_m\delta_n$$
$$0\leqslant m\leqslant\bar{M}-1,\ 0\leqslant n\leqslant\bar{N}-1 \tag{3}$$

其中，$\delta_k=\begin{cases}1 & k=0\\0 & k\neq0\end{cases}$。给定的综合窗 $h(k)$ 就可以由此式求出双正交分析窗 $\gamma(k)$。

收稿日期：2012-05-10；修回日期：2012-06-15　基金项目：国家自然科学基金资助项目(61071169)；安徽省教育厅重点基金资助项目(KJ2010A011)；合肥学院人才资金资助项目(12RC09)

作者简介：胡学友(1974-)，男，副教授，博士，主要研究方向为信号与信息处理(xueyouhu@hfuu.edu.cn)；李锐(1986-)，男，硕士研究生，主要研究方向为信号处理；陶亮(1963-)，男，教授，博士，主要研究方向为信号处理、模式识别等.

2　基于辅助双正交分析的实值离散多 Gabor 变换

设 $x(k)$ 是离散时间周期信号，周期为 L，离散实值离散多 Gabor 展开式和变换系数定义[2,3]为式(4)和(5)：

$$x(k)=\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}a^{(i)}(m,n)\,h_{m,n}^{(i)}(k) \tag{4}$$

$$a^{(i)}(m,n)=\sum_{k=0}^{L-1}x(k)\,\gamma_{m,n}^{(i)}(k) \tag{5}$$

其中：

$$h_{m,n}^{(i)}(k)=h^{(i)}(k-m\overline{N})\,cas\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \tag{6}$$

$$\gamma_{m,n}^{(i)}(k)=\gamma^{(i)}(k-m\overline{N})\,cas\left(\frac{2\pi nk}{N}\right) \tag{7}$$

$$h^{(i)}(k)=\alpha^{(-i/2)}h(\alpha^{(-i)}k)\quad \alpha\geqslant 1 \tag{8}$$

$$cas(x)=\sin(x)+\cos(x) \tag{9}$$

$h(k)$ 为高斯窗函数，这里称为基窗或父窗，$h^{(i)}(k)$ 称为调制窗或子窗。传统的离散 Gabor 变换是单窗下进行的，因此 Gabor 栅格大小是固定的，根据信号的时域和频域不确定原理，在单窗条件下很难使时间和频率分辨率同时做到较好；对于给定的一组多综合窗，要寻找其对应的多分析窗也是非常困难的[2]。本文在文献[2]的基础上，提出辅助多窗 $r_{m,n}^{(i)}(k)$ 和 $h_{m,n}^{(i)}(k)$，其双正交关系为

$$\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{k=0}^{L-1}h^{(i)}(k+mN)\,\gamma^{(i)}(k)\,cas\left(\frac{2\pi nk}{\overline{N}}\right)=\frac{L}{MN}\delta(m)\,\delta(n)$$
$$0\leqslant m\leqslant\overline{M}-1,\ 0\leqslant n\leqslant\overline{N}-1 \tag{10}$$

式(10)的矩阵形式可表示为

$$H\cdot\gamma=v \tag{11}$$

其中：

$$v=\left[\frac{L}{MN},0,0,\cdots,0\right]^{\mathrm{T}} \tag{12}$$

$$\gamma=[\gamma^{(0)},\gamma^{(1)},\cdots,\gamma^{(I-1)}]^{\mathrm{T}} \tag{13}$$

$$\gamma^{(i)}=[\gamma^{(i)}(0),\gamma^{(i)}(1),\cdots,\gamma^{(i)}(L-1)]^{\mathrm{T}}$$
$$0\leqslant i\leqslant I-1 \tag{14}$$

$$H=[h^{(0)},h^{(1)},\cdots,h^{(I-1)}] \tag{15}$$

$$h^{(i)}=\begin{bmatrix} h_{0,0}^{(i)}(0) & h_{0,0}^{(i)}(1) & \cdots & h_{0,0}^{(i)}(L-1)\\ h_{0,1}^{(i)}(0) & h_{0,1}^{(i)}(1) & \cdots & h_{0,1}^{(i)}(L-1)\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ h_{\overline{M}-1\overline{N}-1}^{(i)}(0) & h_{\overline{M}-1\overline{N}-1}^{(i)}(1) & \cdots & h_{\overline{M}-1\overline{N}-1}^{(i)}(L-1)\end{bmatrix}_{(\overline{M}\ \overline{N})\times(L)} \tag{16}$$

$$h_{m,n}^{(i)}(k)=h^{(i)}(k+mN)\,cas\left(\frac{2\pi nk}{\overline{N}}\right)$$
$$0\leqslant i\leqslant I-1,\ 0\leqslant m\leqslant\overline{M}-1,\ 0\leqslant n\leqslant\overline{N}-1 \tag{17}$$

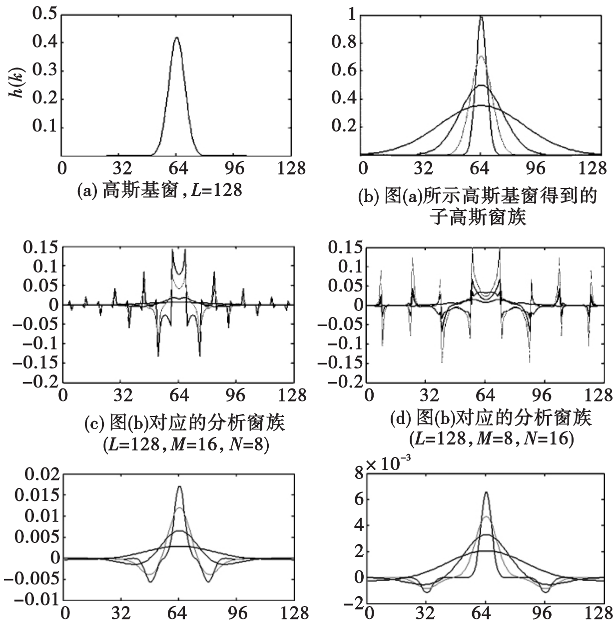
式(14)中的 γ 为多解，通常取其广义逆解，即

$$\gamma_g=H^{\mathrm{T}}(HH^{\mathrm{T}})^{-1}v \tag{18}$$

例如，已知一个高斯窗函数为 $h(k)=(32)^{-0.25}\exp\left\{-\pi\frac{(k-(L-1)/2)^2}{L}\right\}$。如图1(a)所示，其中 $L=128$，$I=4$，$\alpha=2$；根据提出算法的式(13)等可求得子综合窗族 $h^{(i)}(k)$，如图1(b)所示；求出与其相对应的四种分析窗族 $\gamma^{(i)}(k)$ 分别如图1(c)～(f)所示。其中：$M=16$，$N=8$，临界抽样时，如图1(c)所示；当 $M=8$，$N=16$，临界抽样时，如图1(d)所示；当 $M=32$，$N=16$，过抽样率 $\frac{MN}{L}=4$ 时，如图1(e)所示；当 $M=32$，$N=32$，抽样率 $\frac{MN}{L}=8$ 时，如图1(f)所示。

根据双正交关系式求出分析窗族以后，就可以利用快速 DHT 计算式(5)中 $a^{(i)}(m,n)$，其中 $0\leqslant i\leqslant I-1$，即

$$a^{(i)}(m,n)=\sum_{k=0}^{L-1}x(k)\,\gamma^{(i)}(k-m\overline{N})\,cas\left(\frac{2\pi kn}{N}\right)=$$
$$\sum_{p=0}^{\overline{M}-1}\sum_{q=0}^{N-1}x(pN+q)\,\gamma^{(i)}(pN+q-m\overline{N})\,cas\left(\frac{2\pi nq}{N}\right)=$$
$$\sum_{q=0}^{N-1}\left\{\sum_{p=0}^{\overline{M}-1}x(pN+q)\,\gamma^{(i)}(pN+q-m\overline{N})\right\}cas\left(\frac{2\pi nq}{N}\right) \tag{19}$$



(a) 高斯基窗，L=128　(b) 图(a)所示高斯基窗得到的子高斯窗族

(c) 图(b)对应的分析窗族 (L=128, M=16, N=8)　(d) 图(b)对应的分析窗族 (L=128, M=8, N=16)

(e) 图(b)对应的分析窗族 (L=128, M=32, N=16)　(f) 图(b)对应的分析窗族 (L=128, M=32, N=32)

图1　高斯窗函数变换分析

信号的重建也可以利用快速 DHT 算法，式(4)可重写为

$$x(k)=\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}a^{(i)}(m,n)\,h_{m,n}^{(i)}(k)=$$
$$\sum_{i=0}^{I-1}\sum_{m=0}^{M-1}\sum_{n=0}^{N-1}a^{(i)}(m,n)\,h^{(i)}(k-m\overline{N})\,cas\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)=$$
$$\sum_{i=0}^{I-1}\left\{\sum_{m=0}^{M-1}h^{(i)}(k-m\overline{N})\sum_{n=0}^{N-1}a^{(i)}(m,n)\,cas\left(\frac{2\pi nk}{N}\right)\right\}$$
$$x(pN+q)=$$
$$\sum_{i=0}^{I-1}\left\{\sum_{m=0}^{M-1}h^{(i)}(pN+q-m\overline{N})\sum_{n=0}^{N-1}a^{(i)}(m,n)\,cas\left(\frac{2\pi n(pN+q)}{N}\right)\right\} \tag{20}$$

其中：$k=pN+q$；$p=0,1,\cdots,\overline{M}-1$；$q=0,1,\cdots,N-1$。从式(20)中可以看出，大括号里的第二个求和项是 N 点的 DHT 变换。表1是本文算法和文献[2]算法复杂性的对比，从表中可以看出本文提出的算法的计算复杂度比文献[2]小，因此具有较快的速度。

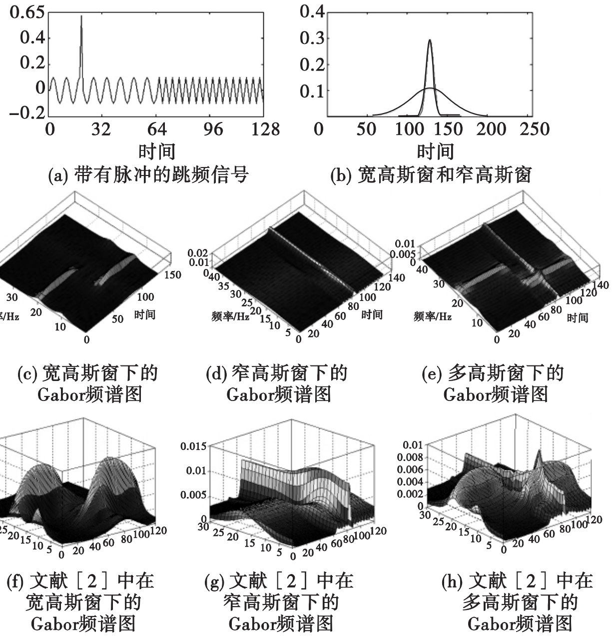
表1　本文提出的算法和文献[2]算法复杂度对比

算法	正变换	逆变换
本文算法	$I\times\{M\times(N$ 点 1-D DHT$)+M\times L$ 次实数相乘 $+(\overline{M}-1)\times M\times N$ 次实数相加$\}$	$I\times\{M\times(N$ 点 1-D DHT$)+M\times L$ 次实数相乘 $+(M-1)\times L$ 次实数相加$\}$
文献[2]算法	$I\times\{\overline{M}\times M\times(N$ 点 1-D DFT$)+M\times L$ 次实数相乘 $+(\overline{M}-1)\times M\times N$ 次复数相加$\}$	$I\times\{\overline{M}\times M\times(N$ 点 1-D DFT$)+M\times L$ 次实数相乘 $+(M-1)\times L$ 次复数相加$\}$

3　仿真实验

用多 Gabor 展开的时频分析工具来分析带有一个脉冲的跳频信号，如图2(a)所示。此信号由两个不同频率的正弦信号和一个脉冲信号组成：$(0.1\times\sin(2\pi\times10\times t)+0.1\times\sin(2\pi\times20\times t)+0.3\times\delta(t-20))$，信号长度 $L=128$，$M=128$，$N=64$；采样频率为 80 Hz，其中正弦信号的频率分别为 10 和 20 Hz。本文使用的时域较宽和时域较窄的两个高斯窗函数，如图2(b)所示；在时域较宽高斯窗下的 Gabor 频谱如图2(c)所示；在时域较窄的高斯窗下的 Gabor 频谱如图2(d)所示；在这两个窗函数下的多 Gabor 展开的频谱如图2(e)所示。从图2(c)中可以看出，在宽高斯窗下很难检测到脉冲信号，但是能

清晰地检测到两个正弦信号；从图 2(d) 中可以看出，在窄高斯窗下很清晰地检测到了脉冲信号，但不能清晰地检测到两个正弦信号；由图 2(e) 可以明显地看出，使用本文提出的多高斯窗进行检测，在多高斯窗下的 Gabor 能清晰地检测到脉冲信号，同时也能清晰地分辨出两个不同频率的正弦信号。图 2(f) 是文献[2]中算法在宽高斯窗下的 Gabor 频谱图，虽然检测到了正弦信号，但时频平面上并不平坦；图 2(g) 是文献[2]中算法在窄高斯窗下的 Gabor 频谱图，虽然检测到了脉冲信号，但是频谱两边粘滞不清；图 2(h) 是文献[2]中算法在多高斯窗下的 Gabor 频谱图，虽然检测到正弦信号和脉冲信号，但是时频面上有其他频谱出现，而且不清晰。



(a) 带有脉冲的跳频信号　(b) 宽高斯窗和窄高斯窗

(c) 宽高斯窗下的 Gabor频谱图　(d) 窄高斯窗下的 Gabor频谱图　(e) 多高斯窗下的 Gabor频谱图

(f) 文献［2］中在宽高斯窗下的 Gabor频谱图　(g) 文献［2］中在窄高斯窗下的 Gabor频谱图　(h) 文献［2］中在多高斯窗下的 Gabor频谱图

图2　带有脉冲的跳频信号变换分析

4　结束语

针对传统的单窗复值离散 Gabor 变换具有固定的时频分辨率，文献[2]给出了基于框架的多 Gabor 变换算法复杂度较高。本文在多 Gabor 变换的基础上提出了一种基于辅助双正交分析法的实值离散 Gabor 变换及其快速算法，该算法相比文献[2]算法减小了计算量。仿真实验证明提出的算法能明显改善传统 Gabor 变换的时频分辨率。

参考文献：

[1] GABOR D. Theory of communication[J]. Journal of the Institution of Electrical Engineers，1946，94(73)：429-457.

[2] 陶亮，顾涓涓. 实值 Gabor 变换理论及应用[M]. 合肥：安徽科学技术出版社，2005.

[3] LI Shi-dong. Discrete multi-Gabor expansions[J]. IEEE Trans on Information Theory，1999，45(6)：1954-1967.

[4] AKAN A，CHAPARRO L F. Multi-window Gabor expansion for evolutionary spectral analysis[J]. Signal Processing，1997，63(3)：249-262.

[5] TAO Liang，KWAN H K. Fast parallel approach for 2-D DHT-based real-valued discrete Gabor transform[J]. IEEE Trans on Image Processing，2009，18(12)：2790-2796.

[6] TAO Liang，KWAN H K. Novel DCT-based real-valued discrete Gabor transform and its fast algorithms[J]. IEEE Trans on Signal Processing，2009，57(6)：2151-2164.

[7] MATUSIAK E，MICHAELI T，ELDAR Y C. Noninvertible Gabor transforms[J]. IEEE Trans on Signal Processing，2010，58(5)：2597-2612.

[8] 徐婉莹，黄新生，刘育浩，等. 一种基于 Gabor 小波的局部特征尺度提取方法[J]. 中国图象图形学报，2011，16(1)：72-78.

[9] 杨清山，郭成安，金明录. 基于 Gabor 多通道加权优化与稀疏表征的人脸识别方法[J]. 电子与信息学报，2011，33(7)：1618-1624.

[10] LAGAE A，LEFEBVRE S，DUTRE P. Improving Gabor noise[J]. IEEE Trans on Visualization and Computer Graphics，2011，17(8)：1096-1107.

(上接第 102 页) 算法提出了确定该重叠区域归属的判别 OASE-DA，并设计了归属判断的目标函数。由于对象—属性子空间边缘重叠区域与各个相邻子空间均有一定的从属关系，本文在确定其归属时，不仅考虑了最小化子空间的内紧凑度，而且还考虑了子空间之间的分离度。最后通过算例验证了该方法的有效性与可行性。

参考文献：

[1] HAN Jia-wei，KAMBER M. 数据挖掘概念与技术[M]. 范明，孟小峰，等译. 2 版. 北京：机械工业出版社，2007.

[2] 武森，高学东，巴斯蒂安 M. 数据仓库与数据挖掘[M]. 北京：冶金工业出版社，2003.

[3] VERLEYSEN M. Learning high-dimensional data[C]//Proc of NATO Advanced Research Workshop on Limitations and Future Trends in Neural Computation. 2001：141-162.

[4] YANG Qiang，WU Xin-dong. 10 challenging problems in data mining research[J]. International Journal of Information Technology and Decision Making，2006，5(4)：597-604.

[5] 杨风召. 高维数据挖掘技术研究[M]. 南京：东南大学出版社，2007.

[6] 张燕萍，姜青山. K-means 型软子空间聚类算法[J]. 计算机科学与探索，2010，4(11)：1019-1026.

[7] 陈黎飞，郭躬德，姜青山. 自适应的软子空间聚类算法[J]. 软件学报，2010，21(10)：2513-2523.

[8] 何虎翼，姚莉秀，沈红斌，等. 一种新的子空间聚类算法[J]. 上海交通大学学报，2007，41(5)：557.

[9] 祝琴，高学东，武森，等. 高维稀疏数据对象—属性分割[J]. 数学的认识与实践，2011，41(7)：184-189.

[10] 单世民，张宁，江贺，等. 基于网格和密度的簇边缘精度增强聚类算法[J]. 计算机工程与应用，2008，44(23)：143-146.

[11] QIU Bao-zhi，LI Xiang-li，SHEN Jun-yi. Grid-based clustering algorithm based on intersecting partition and density estimation[C]//Proc of Pacific-Asia Conference on Knowledge Discovery and Data Mining. Berlin：Springer，2007：368-377.

[12] 高亚鲁. 子空间聚类算法的研究及应用[D]. 江苏：江苏大学，2009.

[13] 余灿玲，王丽珍，张元武. 基于网格密度方向的聚类簇边缘精度加强算法[J]. 计算机研究与发展，2010，7(5)：815-823.

[14] 皋军，王士同. 具有特征排序功能的鲁棒性模糊聚类方法[J]. 自动化学报，2009，35(2)：145-153.

[15] GAN G，WU J. A convergence theorem for the fuzzy subspace clustering (FSC) algorithm[J]. Pattern Recognition，2008，41(6)：1939-1947.

[16] MacQUEEN J. Some methods for classification and analysis of multivariate observations[C]//Proc of the 5th Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability. 1967：281-297.

[17] XU Lei，JORDAN M I. On convergence properties of the EM algorithm for Gaussian mixtures[J]. Neural Computation，1996，8(1)：129-151.

[18] HUANG Zhe-xue，NG M K，RONG Hong-qiang，*et al*. Automated variable weighting in K-means type clustering[J]. IEEE Trans on Pattern Analysis and Machine Intelligence，2005，27(5)：657-668.