基于第二类统计量的 K 分布参数估计*

孙增国

(华侨大学 计算机科学与技术学院，福建 厦门 361021)

摘 要： 为了高效估计出 K 分布的参数，提出了对数累积量参数估计方法。基于第二类统计量，先对 K 分布的概率密度函数进行 Mellin 变换，从而获得 K 分布的第二类第一特征函数；然后对第二类第一特征函数进行对数变换，由此获得 K 分布的第二类第二特征函数；最后对第二类第二特征函数求导数，进而获得 K 分布的前两阶对数累积量，由此可以估计 K 分布的参数。与传统的最大似然估计方法相比，K 分布的对数累积量估计具有解析的表达式，易于计算。Monte Carlo 仿真表明，基于第二类统计量的 K 分布对数累积量估计可获得较高的估计精度。

关键词： K 分布；Mellin 变换；第二类统计量；对数累积量估计；Monte Carlo 仿真

中图分类号： TP391.9 **文献标志码：** A **文章编号：** 1001-3695(2013)01-0046-03

doi:10.3969/j.issn.1001-3695.2013.01.010

Parameter estimation of K distribution based on second-kind statistics

SUN Zeng-guo

(*College of Computer Science & Technology, Huaqiao University, Xiamen Fujian* 361021, *China*)

Abstract: In order to efficiently estimate the parameters of K distribution, this paper proposed the log-cumulant estimator. Based on second-kind statistics, first it derived the second-kind first characteristic function of K distribution by taking the Mellin transformation to the probability density function of K distribution, second obtained the second-kind second characteristic function of K distribution from the logarithmic transformation of the second-kind first characteristic function, and last deduced the first two log-cumulants to estimate the parameters of K distribution by taking the derivative of the second-kind second characteristic function. Compared to the traditional maximum likelihood estimator, the log-cumulant estimator of K distribution with analytical expressions was easy to compute. Monte Carlo simulations demonstrate that the log-cumulant estimator of K distribution based on second-kind statistics achieves high estimation accuracy.

Key words: K distribution; Mellin transformation; second-kind statistics; log-cumulant estimator; Monte Carlo simulations

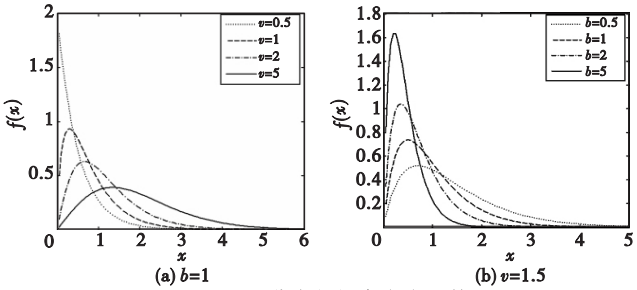
K 分布广泛用于海洋和地面的建模中，传统的 Rayleigh 分布可以看做是 K 分布的特例[1~4]。作为双参数的统计分布，与单参数的分布(如 Rayleigh 分布)相比，K 分布可以更好地描述实验数据[3]。例如，当雷达分辨单元较大时，可以认为分辨单元内包含许多散射体，并且不存在占主导地位的散射体，此时，传统的 Rayleigh 分布可以很好地描述雷达回波。但是，如果雷达分辨单元的尺寸以及掠射角较小，在这种情况下，只有 K 分布才能精确描述雷达回波的统计特性。为了在实际应用中使用 K 分布，一个关键问题就是如何高效地估计出 K 分布的参数。由于 K 分布的概率密度函数中含有特殊的修正 Bessel 函数，而修正 Bessel 函数又没有统一的解析表达式，因此，传统的最大似然估计方法不能高效地估计 K 分布的参数，即最大似然估计没有解析的表达形式，往往需要迭代计算，而且初值选择和终止条件不易确定。基于第二类统计量，本文提出了高效估计 K 分布参数的对数累积量方法，它具有简洁的解析表达式，不需要迭代计算。Monte Carlo 仿真表明，K 分布的对数累积量估计可以获得较高的估计精度。

1 K 分布

K 分布具有如下的概率密度函数[3]：

$$f(x)=\frac{4b^{\frac{(\nu+1)}{2}}x^{\nu}}{\Gamma(\nu)}K_{\nu-1}(2x\sqrt{b})\quad x>0 \tag{1}$$

其中：$\nu(\nu>0)$ 是形状参数；$b(b>0)$ 是尺度参数；$\Gamma(\cdot)$ 是 Gamma 函数；$K_{\nu-1}(\cdot)$ 是第二类 $\nu-1$ 阶修正 Bessel 函数。当 ν 趋向于无穷大时，K 分布变为传统的 Rayleigh 分布。因此，Rayleigh 分布可以看做是 K 分布的特例。图 1 给出了当 ν 和 b 分别取不同值时 K 分布的概率密度函数。显然，ν 决定 K 分布的形状，当 ν 较小时(如 $\nu=0.5$)，K 分布不再具有单峰特性；b 决定 K 分布向纵坐标轴的压缩程度，b 越大，K 分布向纵坐标轴的压缩程度就越强。



(a) b=1 (b) v=1.5

图1 K分布的概率密度函数

假定 X 是服从 K 分布的随机变量，其形状参数和尺度参数分别为 ν 和 b。定义新的随机变量 $Y=\sqrt{b}X$，可以证明，Y 同

收稿日期：2012-06-07；修回日期：2012-07-14 基金项目：国家自然科学基金资助项目(61102163，60805021，61175121)；国家教育部新世纪优秀人才支持计划资助项目(NCET-10-0117)；福建省自然科学基金资助项目(2012J01271，2011J01349)；福建省高等学校杰出青年科研人才培育计划资助项目(JA10006)；华侨大学高层次人才科研启动费资助项目(11BS212)

作者简介：孙增国(1980-)，男，陕西西安人，讲师，博士，CCF 会员，主要研究方向为雷达信号及图像处理(duffer2000@163.com).

样服从 K 分布,其形状参数和尺度参数分别为 ν 和 1。也就是说,K 分布可以通过$\sqrt{b}$的乘积进行标准化,其形状参数保持不变,而尺度参数则变为 1。

2　第二类统计量介绍

普通统计量是由傅里叶变换定义的[5,6]。如果概率密度函数定义在正半轴上,就可以把普通统计量中的傅里叶变换替换为 Mellin 变换,从而定义相应的第二类统计量[6~9]。对于概率密度函数 $f(x)$ $(0\leqslant x<\infty)$,其 Mellin 变换定义如下:

$$\Phi(s)=\int_0^{\infty}x^{s-1}f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

$f(x)$ 的 Mellin 变换 $\Phi(s)$ 正是它的第二类第一特征函数。由此,$f(x)$ 的第二类第二特征函数 $\Psi(s)$ 和 r 阶对数累积量 $\tilde{k}_r$ 分别定义如下:

$$\Psi(s)=\ln\Phi(s) \tag{3}$$

$$\tilde{k}_r=\left.\frac{d^r\Psi(s)}{\mathrm{d}s^r}\right|_{s=1} \tag{4}$$

对数累积量可以通过样本对数累积量加以估计。以前两阶对数累积量为例,存在

$$\hat{\tilde{k}}_1=\frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}\ln y_i \tag{5}$$

$$\hat{\tilde{k}}_2=\frac{1}{M-1}\sum_{i=1}^{M}(\ln y_i-\hat{\tilde{k}}_1)^2 \tag{6}$$

其中: y_i 是样本,M 是样本个数。

3　K 分布的对数累积量估计

K 分布定义在正半轴上,因此可以定义相应的第二类统计量。首先把 K 分布的概率密度函数式(1)代入式(2)中,可得 K 分布的第二类第一特征函数如下:

$$\Phi(s)=\frac{4b^{\frac{(\nu+1)}{2}}}{\Gamma(\nu)}\int_0^{\infty}x^{s+\nu-1}K_{\nu-1}(2x\sqrt{b})\,\mathrm{d}x \tag{7}$$

使用下面的恒等式[10]:

$$\int_0^{\infty}x^{\mu}K_{\nu}(ax)\,\mathrm{d}x=2^{\mu-1}a^{-\mu-1}\Gamma\left(\frac{1+\mu+\nu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1+\mu-\nu}{2}\right)$$

$$\mathrm{Re}(1+\mu\pm\nu)>0,\mathrm{Re}(a)>0 \tag{8}$$

K 分布的第二类第一特征函数可以简化为

$$\Phi(s)=\frac{b^{\frac{(1-s)}{2}}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\Gamma\left(\nu+\frac{s-1}{2}\right)}{\Gamma(\nu)} \tag{9}$$

把式(9)代入式(3)中,可得 K 分布的第二类第二特征函数如下:

$$\Psi(s)=\frac{(1-s)\ln b}{2}+\ln\left(\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\right)+$$

$$\ln\left(\Gamma\left(\nu+\frac{s-1}{2}\right)\right)-\ln(\Gamma(\nu)) \tag{10}$$

把式(10)代入式(4)中,经过适当化简,可得 K 分布的前两阶对数累积量如下:

$$\tilde{k}_1=-\frac{\ln b}{2}-\frac{C_e}{2}+\frac{\psi(\nu)}{2} \tag{11}$$

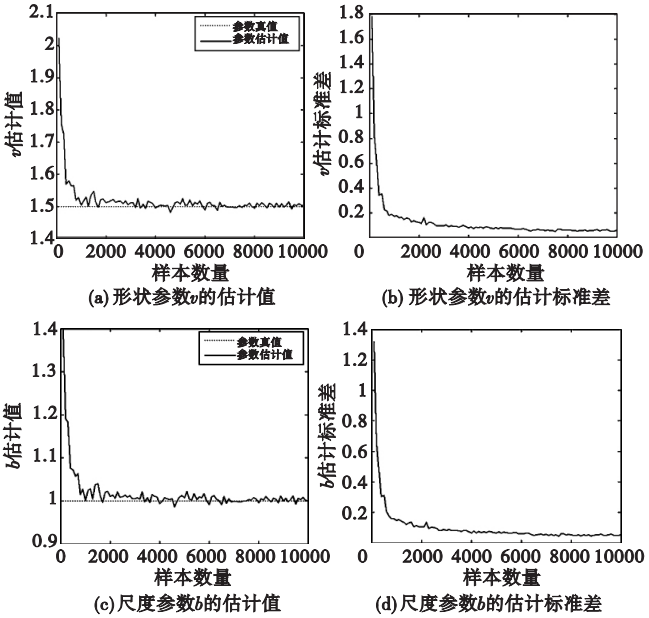
$$\tilde{k}_2=\frac{\pi^2}{24}+\frac{\psi(1,\nu)}{4} \tag{12}$$

其中: C_e 是欧拉常数($C_e\approx0.5772$); $\psi(\cdot)$ 是 Digamma 函数; $\psi(1,\cdot)$ 是 Trigamma 函数(Digamma 函数的一阶导数)。给定一组样本,通过式(5)和(6)计算样本对数累积量$\hat{\tilde{k}}_1$和$\hat{\tilde{k}}_2$,并用$\hat{\tilde{k}}_1$和$\hat{\tilde{k}}_2$分别代替上面两式中的 $\tilde{k}_1$ 和 $\tilde{k}_2$,由此,形状参数 ν 可由式(12)估计得出,而尺度参数 b 可由式(11)估计得出。因此,式(11)和(12)就构成了 K 分布的对数累积量估计式。与传统的最大似然估计方法相比,K 分布的对数累积量估计具有简洁的解析表达式。同时,由于 Trigamma 函数 $\psi(1,\cdot)$ 是严格单调函数,因此,使用常见的数值方法如二分法很容易获得 ν 的精确估计值[11]。也就是说,由于具有解析表达式以及 $\psi(1,\cdot)$ 的单调性,K 分布的对数累积量估计易于计算,便于实现。

4　Monte Carlo 仿真

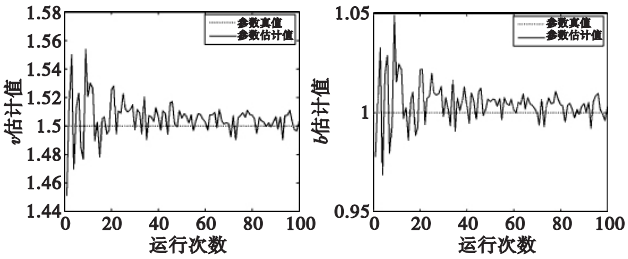
Monte Carlo 仿真的一个重要问题就是如何产生服从特定分布的样本。Skolnik 的研究表明,K 分布可由一个传统 Rayleigh 分布所描述的快速波动分量被一个 Gamma 分布所描述的缓慢波动分量所调制而形成[3]。因此,分别产生服从 Rayleigh 分布和 Gamma 分布的样本,由此形成服从 K 分布的样本。产生服从 K 分布的一组样本,使用对数累积量方法估计出参数,这就完成了一次仿真实验。由于样本产生的随机性,往往需要独立运行多次仿真实验,并把多次仿真结果的均值和标准差作为最终的估计结果,这就是 Monte Carlo 仿真的一般步骤。

K 分布的对数累积量估计首先要通过式(5)和(6)计算样本对数累积量,因此,样本数量是影响对数累积量估计性能的重要因素。图 2 给出了对数累积量估计的性能随样本数量的变化关系,包括形状参数的估计值和估计标准差,以及尺度参数的估计值和估计标准差。可见,不论是形状参数 ν 还是尺度参数 b,其估计值均随着样本数量的增加而逐渐趋向真实值,其估计标准差均随着样本数量的增加而逐渐降低。也就是说,较多的样本数量可以获得较高的估计性能。为了克服样本产生的随机性,Monte Carlo 仿真需要独立运行多次,并把多次仿真结果的均值作为最终的参数估计值。因此,运行次数是影响对数累积量估计精度的又一因素。图 3 给出了对数累积量估计的精度随运行次数的变化关系,包括形状参数的估计值以及尺度参数的估计值。可见,不论是形状参数 ν 还是尺度参数 b,其估计值总体上均随着运行次数的增加而趋向真实值。也就是说,较多的运行次数可以获得较高的估计精度。在形状参数和尺度参数分别取不同值时,对数累积量估计的 Monte Carlo 仿真结果分别如表 1 和 2 所示。其中,括号中的数值为多次仿真结果的标准差。可见,不论形状参数或尺度参数取为何值,对数累积量估计均能获得较高的估计精度。



(a)形状参数ν的估计值　(b)形状参数ν的估计标准差
(c)尺度参数b的估计值　(d)尺度参数b的估计标准差

图2　对数累积量估计的性能随样本数量的变化关系
(ν=1.5, b=1, 对于不同的样本数量,
独立运行次数均为100)



(a) 形状参数v的估计值 (b) 尺度参数b的估计值

图3 对数累积量估计的精度随运行次数的变化关系（v=1.5，b=1，对于不同的运行次数，样本数量均为10 000）

表 1 对数累积量估计的 Monte Carlo 仿真结果（$b=1$，独立运行 100 次，每次的样本数量均为 10000）

参数真值	$\hat{v}$	$\hat{b}$
$v=0.5$	0.500 2 (0.008 6)	1.000 9 (0.038 1)
$v=1$	1.004 7 (0.024 2)	1.006 1 (0.033 8)
$v=1.5$	1.502 5 (0.053 9)	1.002 3 (0.047 5)
$v=2$	1.997 1 (0.102 2)	0.997 7 (0.063 4)
$v=5$	5.000 5 (0.649 6)	1.000 4 (0.138 2)

表 2 对数累积量估计的 Monte Carlo 仿真结果（$v=1.5$，独立运行 100 次，每次的样本数量均为 10000）

参数真值	$\hat{v}$	$\hat{b}$
$b=0.5$	1.496 8 (0.046 2)	0.499 0 (0.019 1)
$b=1$	1.501 1 (0.053 6)	0.999 9 (0.044 7)
$b=1.5$	1.501 3 (0.060 3)	1.503 8 (0.079 0)
$b=2$	1.501 6 (0.054 5)	2.003 4 (0.093 2)
$b=5$	1.502 5 (0.051 3)	5.004 1 (0.231 0)

5 结束语

为了高效地估计出 K 分布的参数，本文提出了基于第二类统计量的对数累积量估计方法。首先对 K 分布的概率密度函数进行 Mellin 变换，从而获得 K 分布的第二类第一特征函数；然后对第二类第一特征函数进行对数变换，从而获得 K 分布的第二类第二特征函数；最后对第二类第二特征函数求前两阶导数，进而获得 K 分布的对数累积量估计式。与传统的最大似然估计方法相比，对数累积量估计具有简洁的解析表达式，易于计算。Monte Carlo 仿真表明，对数累积量估计可以获得较高的估计精度。因此，基于第二类统计量的对数累积量估计是 K 分布参数估计的高效方法。作为强有力的数学工具，第二类统计量同样可以用于其他常见分布（如对数—正态分布）的参数估计中，这是下一步的研究内容。

参考文献:

[1] 张红，王超，张波，等. 高分辨率 SAR 图像目标识别 [M]. 北京：科学出版社，2009.

[2] SKOLNIK M I. 雷达系统导论 [M]. 3 版. 左群声，徐国良，马林，等译. 北京：电子工业出版社，2006.

[3] WARD K D，TOUGH R J A，WATTS S. Sea clutter：scattering，the K distribution and radar performance [M]. London：The Institution of Engineering Technology，2006.

[4] 皮亦鸣，杨建宇，付毓生，等. 合成孔径雷达成像原理 [M]. 成都：电子科技大学出版社，2007.

[5] PAPOULIS A，PILLAI S U. 概率、随机变量与随机过程 [M]. 保铮，冯大政，水鹏朗，译. 西安：西安交通大学出版社，2004.

[6] 孙增国，韩崇昭. 基于拖尾分布的高分辨率合成孔径雷达图像建模 [J]. 物理学报，2010，59(2)：998-1008.

[7] ACHIM A，KURUOGLU E E，ZERUBIA J. SAR image filtering based on the heavy-tailed Rayleigh model [J]. IEEE Trans on Image Processing，2006，15(9)：2686-2693.

[8] NICOLAS J M. Alpha-stable positive distributions：a new approach based on second kind statistics [C] //Proc of European Signal Processing Conference. Toulouse：EURASIP，2002：197-200.

[9] TISON C，NICOLAS J M，TUPIN F，*et al*. A new statistical model for Markovian classification of urban areas in high-resolution SAR images [J]. IEEE Trans on Geoscience and Remote Sensing，2004，42(10)：2046-2057.

[10] GRADSHTEYN I S，RYZHIK I M. Table of integrals，series，and products [M]. 北京：世界图书出版公司，2007.

[11] PRESS W H，TEUKOLSKY S A，VETTERLING W T，*et al*. Numerical recipes in C [M]. Cambridge：Cambridge University Press，1994.

（上接第 45 页）

4 结束语

本文依据聚类假设的思想，提出了一种基于聚类核的半监督支持向量机分类方法。该算法根据高密度区域的样本在聚类中被分在同一类中的特性，采用 K-均值聚类算法对样本集进行多次聚类的方法构造聚类核，将无标记样本的信息融入分类器的训练过程中。该方法能够有效利用无标记样本信息，而且实验结果也证实了无标记样本的加入可以提高分类的精度。但本方法涉及到支持向量机中参数的选择、K-均值聚类算法的有效性，并且随着数据量的增大，运行时间也会随之增加。因此，如何更有效地进行参数选择和 K-均值聚类，同时降低时间复杂度仍然有待研究。

参考文献:

[1] SCHOLKOPF B，SMOLA A J. Learning with kernel：support vector machines，regularization，optimization and beyond [M]. Cambridge，MA：MIT Press，2002：190-195.

[2] JOACHIMS T. Transductive inference for text classification using support vector machines [C] //Proc of the 16th International Conference on Machine Learning. San Francisco：Morgan Kaufmann Publishers，1999：200-209.

[3] CHAPELLE O，SINDHWANI V，KEERTHI S. Optimization techniques for semi-supervised support vector machines [J]. Journal of Machine Learning Research，2008，9(2)：203-233.

[4] CHAPELLE O，ZIEN A. Semi-supervised classification by low density separation [C] //Proc of the 10th International Workshop on Artificial Intelligence and Statistics. San Francisco：Morgan Kaufmann Publishers，2005：57-64.

[5] CHAPELLE O，CHI M，ZIEN A. A continuation method for semi-supervised SVMs [C] //Proc of the 23rd International Conference on Machine Learning. New York：ACM Press，2006：185-192.

[6] COLLOBERT R，SINZ F. Large scale transductive SVMs [J]. Journal of Machine Learning Research，2006，7(8)：1687-1712.

[7] ZHU Xiao-jin. Semi-supervised learning literature survey TR1530 [R]. Wisconsin：Dept. of Computer Sciences，University of Wisconsin，2008：13-16.

[8] SERGIOS T，KONSTANTIONS K. Pattern recognition [M]. [S. l.]：Academic Press，2008：577-582.

[9] CHAPELLE O，WESTON J，SCHOLKOPF B. Cluster kernels for semi-supervised learning [C] //Proc of the 16th Annual Conference on Neural Information Processing Systems. Massachusetts：MIT Press，2003：321-328.

[10] CHAPELLE O，SCHÖLKOPF B，ZIEN A. Semi-supervised learning [M]. Massachusetts：MITZIEN Press，2006：348-351.

[11] TUIA D，CAMPS-VALLS G. Urban image classification with semisupervised multiscale cluster kernels [J]. IEEE Journal of Selected topics in Applied Earth Observations and Remote Sensing，2011，4(1)：65-74.

[12] The berkeley segmentation dataset and benchmark [EB/OL] [2011-02-20]. http：//www. eecs. berkeley. edu/Research/Projects/CS/vision/bsds/.

[13] GULSHAN V，ROTHER C，CRIMINISI A，*et al*. Geodesic star convexity for interactive image segmentation [C] //Proc of IEEE Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. 2010：3129-3136.