

# 快速相量提取算法

索南加乐<sup>1</sup>, 王斌<sup>1</sup>, 王莉<sup>1</sup>, 孙金凤<sup>2</sup>, 肖敏<sup>2</sup>

(1. 西安交通大学电气工程学院, 陕西省 西安市 710049; 2. 西安供电局, 陕西省 西安市 71003)

## A Fast Phasor Calculation Algorithm for Power Systems

SUONAN Jiale<sup>1</sup>, WANG Bin<sup>1</sup>, WANG Li<sup>1</sup>, SUN Jinfeng<sup>2</sup>, XIAO Min<sup>2</sup>

(1. College of Electrical Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an 710049, Shaanxi Province, China;  
2. Xi'an Power Supply Bureau, Xi'an 710032, Shaanxi Province, China)

**ABSTRACT:** Quickly and accurately calculating power-frequency phasor from transient fault signals is crucial for relay protection. This paper proposes a fast method for phasor calculation. Based on matrix pencil method, a square matrix was formed by sampling matrices of input signals and reference signals. Its eigenvalues contain the information of the concerned phasors, among which the power-frequency phasor can be obtained by solving the eigenvalues. The computation burden of eigenvalues is huge. A reduced order method was proposed to simplify the calculation complexity, in which solving eigenvalues of a high order matrix was transformed into solving eigenvalues of a second order, and thus the efficiency of calculation was improved. Simulation results and theoretical analysis demonstrate that the presented method has low computational complexity and it is immune to harmonics or decaying DC components. This method also has high accuracy even for short data window.

**KEY WORDS:** power frequency; phasor measurement; transient fault signals; harmonics; decaying DC component

**摘要:** 从故障暂态信号中快速、准确地提取出工频相量, 对于继电保护是十分重要的。为此提出一种快速相量提取算法。基于矩阵束方法, 利用给定工频信号的采样阵和输入信号采样阵构成一个方阵, 该方阵的特征根包含工频相量信息, 通过求解这个方阵的特征根, 即可得到工频相量。但是求取该方阵特征根的计算量较大, 针对此问题给出了降阶方法, 将求高阶矩阵特征根转化为求2阶矩阵特征根, 从而提高了计算效率。理论分析和仿真结果表明, 所提出的方法计算量小, 可消除各类谐波及衰减直流分量的影响, 在较短数据窗内仍具有很高的精度。

**基金项目:** 国家自然科学基金项目(51037005); 国家重点基础研究发展计划项目(973项目)(2009CB219704, 2012CB215105)。

Project Supported by National Natural Science Foundation of China (51037005); The National Basic Research Program of China (973 Program) (2009CB219704, 2012CB215105).

**关键词:** 工频; 相量提取; 故障暂态信号; 谐波; 直流衰减分量

## 0 引言

目前, 大多数继电保护原理都要用到故障后的基频分量。在电力系统受扰动后的暂态过程中, 电压和电流的相量是影响继电保护装置动作行为、构成保护动作判据的基本电气量, 因此, 准确、快速地计算出电压和电流相量对继电保护装置的正常工作、故障分析与定位起着重要的作用, 进而才能保障电力系统安全正常地运行<sup>[1-3]</sup>。

国内外学者提出了很多相量测量算法, 这些方法大致分为以下几类: 傅氏算法及其改进算法、最小二乘法(least square, LS)及其他方法等。

傅氏算法<sup>[4-5]</sup>由于未考虑到非整次谐波和衰减非周期分量的影响, 会产生频谱泄露和栏栅效应。它的几种改进算法<sup>[6-10]</sup>虽然性能得到一定的改善, 但都会引入迭代计算、限制数据窗等问题。LS 算法是将输入的暂态电气量与一个预设的含有非周期分量及某些谐波分量的函数模型按最小平方误差原理进行拟合, 从而求出输入信号中的工频及各种暂态分量的幅值和相角<sup>[11]</sup>。LS 算法要求预先给定输入信号的函数模型, 为给定更准确的信号函数模型, 矩阵束算法<sup>[12-15]</sup>被引入电力系统, 它将信号看作“衰减指数和”, 并能通过奇异值分解来确定模型阶数。但是, 信号模型的精度依赖于较长的数据窗, 往往模型阶数较高, 故计算量较大。还有一些方法<sup>[16-22]</sup>虽然稳定性很好, 并有效地提高了计算结果的精度, 但是它们也增加了计算量、依赖较长的数据窗或使用了迭代。总之, 以上这些方法都无法将精度、响应时间和速度有效地统一起来。

本文提出了一种快速相量测量算法, 通过矩阵

乘法消除了噪声、各类谐波及衰减非周期分量的影响, 然后利用降阶算法快速、准确地提取出信号中工频分量的幅值和相位。

## 1 算法原理

### 1.1 信号模型

假设信号由一系列具有任意幅值、相位、频率和衰减因子的指数函数组成, 即由一组衰减的余弦分量组成:

$$i(t) = \sum_{m=1}^q A_m e^{\alpha_m t} \cos(2\pi f_m t + \varphi_m) \quad (1)$$

式中:  $A_m$  为幅值;  $\varphi_m$  为相位;  $\alpha_m < 0$ , 为衰减因子;  $f_m$  为频率;  $q$  为信号分量的个数。

设式(1)中有  $q_1$  个衰减余弦分量和  $q_2$  个衰减直流分量, 即  $q = q_1 + q_2$ 。将其中的余弦分量用欧拉公式展开:

$$\cos(2\pi f_k t + \varphi_k) = \frac{1}{2} [\exp[j2\pi f_k t + j\varphi_k] + \exp[j2\pi(-f_k)t + j(-\varphi_k)]] \quad (2)$$

由式(2)可知: 一个衰减余弦分量可看作 2 个衰减指数分量之和, 且这 2 个衰减指数分量共轭。将式(1)抽样后变为式(3):

$$i(n) = \sum_{k=1}^M p_k z_k^n \quad (3)$$

$$p_k = A_k \exp(j\varphi_k) \quad (4)$$

$$z_k = \exp[(\alpha_k + j2\pi f_k)T_s] \quad (5)$$

式中:  $M=2q_1+q_2$ , 且  $i(n)$  前  $2q_1$  个分量代表衰减余弦(并令共同表示某频率分量的 2 个指数分量相邻排列)、后  $q_2$  个分量代表衰减直流;  $p_k$  为信号中第  $k$  个分量的复幅值, 包含幅值和相位信息;  $z_k$  为信号中第  $k$  个分量的幅值和相位在一个采样间隔内的变化量;  $T_s$  为采样间隔。易知:  $k$  为偶数且  $k \leq 2q_1$  时,  $p_k$  与  $p_{k-1}$  共轭,  $z_k$  与  $z_{k-1}$  共轭;  $k > 2q_1$  时,  $f_k=0$ 。

类似地构造信号  $u(t)$ , 使其具有与  $i(t)$  相同的频率分量, 且各个分量的衰减因子相同, 但幅值和相位可以不同, 其离散时间函数形式为

$$u(n) = \sum_{k=1}^M p'_k z_k^n \quad (6)$$

对  $i(t)$  和  $u(t)$  的离散时间序列按以下形式分别构成  $(N-L+1) \times L$  阶采样阵  $\mathbf{I}$  和  $\mathbf{U}$ :

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} i(0) & i(1) & \cdots & i(L-1) \\ i(1) & i(2) & \cdots & i(L) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ i(N-L) & i(N-L+1) & \cdots & i(N-1) \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u(0) & u(1) & \cdots & u(L-1) \\ u(1) & u(2) & \cdots & u(L) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u(N-L) & u(N-L+1) & \cdots & u(N-1) \end{bmatrix} \quad (8)$$

由文献[13]可知, 这 2 个矩阵可以写成:

$$\mathbf{I} = \mathbf{Z}_1 \mathbf{P} \mathbf{Z}_2 \quad (9)$$

$$\mathbf{U} = \mathbf{Z}_1 \mathbf{P}' \mathbf{Z}_2 \quad (10)$$

其中:

$$\mathbf{Z}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ z_1 & z_2 & \cdots & z_M \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{(N-L)} & z_2^{(N-L)} & \cdots & z_M^{(N-L)} \end{bmatrix}_{(N-L+1) \times M} \quad (11)$$

$$\mathbf{Z}_2 = \begin{bmatrix} 1 & z_1 & \cdots & z_1^{(L-1)} \\ 1 & z_2 & \cdots & z_2^{(L-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & z_M & \cdots & z_M^{(L-1)} \end{bmatrix}_{M \times L} \quad (12)$$

$$\mathbf{P} = \text{diag}(p_1, \bar{p}_1, \dots, p_{2q_2-1}, \bar{p}_{2q_2-1}, p_{2q_2+1}, \dots, p_M) \quad (13)$$

$$\mathbf{P}' = \text{diag}(p'_1, \bar{p}'_1, \dots, p'_{2q_2-1}, \bar{p}'_{2q_2-1}, p'_{2q_2+1}, \dots, p'_M) \quad (14)$$

式中  $\bar{p}'_1$  为  $p'_1$  的共轭。

将  $\mathbf{I}$  的伪逆<sup>[23]</sup>左乘至  $\mathbf{U}$ , 得:

$$\mathbf{I}^+ \mathbf{U} = \mathbf{Z}_2^+ \mathbf{P}^- \mathbf{Z}_1^+ \mathbf{Z}_1 \mathbf{P}' \mathbf{Z}_2 = \mathbf{Z}_2^+ \mathbf{P}^- \mathbf{P}' \mathbf{Z}_2 \quad (15)$$

式中  $[\cdot]^+$  为矩阵的 Moore-Penrose 广义逆(即伪逆)。

结合式(13)、(14)和(15)可知:

$$\mathbf{P}^- \mathbf{P}' = \mathbf{Z}_2 \mathbf{I}^+ \mathbf{U} \mathbf{Z}_2^+ = \text{diag}\left(\frac{p'_1}{p_1}, \frac{\bar{p}'_1}{\bar{p}_1}, \dots, \frac{p'_{q_2}}{p_{q_2}}, \frac{\bar{p}'_{q_2}}{\bar{p}_{q_2}}, \frac{p'_{2q_2+1}}{p_{2q_2+1}}, \dots, \frac{p'_M}{p_M}\right) \quad (16)$$

由式(16)可看出, 通过求解方阵  $\mathbf{I}^+ \mathbf{U}$  的特征根, 就可以得到信号  $i(t)$  与  $u(t)$  中各个分量的复幅值之比。

### 1.2 工频相量计算

首先, 令  $i(t)$  为输入信号, 并假定  $i(t)$  中包含工频分量。

然后, 设定参考信号  $u(t)$ 。由 1.1 中分析可知,  $u(t)$  与  $i(t)$  具有相同的频率分量及对应的衰减因子, 仅幅值和相位不同。令  $u(t)$  中工频分量复幅值为 1, 其他分量的复幅值均为 0, 并设式(3)和(6)中前 2 个指数分量代表工频, 即

$$\begin{cases} p'_1 = 1 \\ p'_2 = \bar{p}'_1 = 1 \\ p'_3 = \bar{p}'_3 = \dots = p'_M = 0 \end{cases} \quad (17)$$

将式(17)带入式(16), 可得

$$\mathbf{P}^T \mathbf{P}' = \text{diag}\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{p_2}, 0, \dots, 0\right) \quad (18)$$

因此, 通过计算方阵  $\mathbf{I}^T \mathbf{U}$  的特征根, 即可得到输入信号中的工频相量  $p_1$  和  $p_2$ 。

### 1.3 $\mathbf{I}^T \mathbf{U}$ 阵特征根的降阶计算

#### 1.3.1 非满秩矩阵 $\mathbf{I}^T \mathbf{U}$ 的 QR 分解。

由 1.2 节分析可知,  $L$  阶方阵  $\mathbf{I}^T \mathbf{U}$  仅有 2 个非零特征根  $1/p_1$  和  $1/p_2$ , 为了得到它们, 一般需要计算出方阵  $\mathbf{I}^T \mathbf{U}$  的全部特征根。求特征根的运算量一般比较大, 结合矩阵  $\mathbf{I}^T \mathbf{U}$  的特点, 本文提出一个降阶算法: 对高阶方阵  $\mathbf{I}^T \mathbf{U}$  进行矩阵变换, 获得一个 2 阶方阵, 使其包含待求的相量信息。从而, 求解 2 阶方阵的特征根就可以得到所需的相量信息, 简化了计算。具体步骤如下。

记  $\mathbf{A}=\mathbf{I}^T \mathbf{U}$ , 结合 1.2 节介绍的信号模型及采样阵的构造形式, 易知:  $\mathbf{A}$  的秩为 2;  $\mathbf{A}$  的前 2 列为非零向量, 且它们线性无关。

下文证明非满秩矩阵  $\mathbf{A}$  可分解为  $\mathbf{A}=\mathbf{QR}$ , 其中  $\mathbf{Q}$  为正交阵,  $\mathbf{R}$  具有如下形式:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2 \\ 0 & \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (19)$$

式中:  $\mathbf{R}_1$  为  $2 \times 2$  的上三角矩阵;  $\mathbf{R}_2$  为  $2 \times (L-2)$  的满阵;  $\mathbf{E}$  为  $(L-2)$  阶方阵。记  $\mathbf{R}$  中第  $i$  行第  $j$  列元素为  $r_{ij}$ 。

证明:

由 Householder 变换可知, 欲将一个  $n$  维列向量  $\mathbf{x}=[x_1, x_2, \dots, x_n]^T$  的第 1 个元素后面的所有元素变换为 0, 可取  $n$  维 Householder 向量为

$$\mathbf{u} = \frac{\mathbf{x} - \lambda \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{x} - \lambda \mathbf{e}_1\|} \quad (20)$$

式中  $\mathbf{e}_1=[1, 0, \dots, 0]^T$  且与  $\mathbf{x}$  维数相同,  $\lambda$  的取值为

$$\lambda = \begin{cases} \|\mathbf{x}\|, & x_1 \leq 0 \\ -\|\mathbf{x}\|, & x_1 \geq 0 \end{cases} \quad (21)$$

从而构造 Householder 变换阵  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H} = \mathbf{E} - 2\mathbf{u}\mathbf{u}^T \quad (22)$$

使以下式子成立

$$\mathbf{H}\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|\mathbf{e}_1 \quad (23)$$

故分解的具体步骤如下:

1) 对  $\mathbf{A}$  的第 1 列进行变换。记  $\mathbf{A}=[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \dots, \boldsymbol{\beta}_L]$ , 令  $\mathbf{x}=\boldsymbol{\beta}_1$ , 由式(20)可得向量  $\mathbf{u}$ 。令  $\mathbf{u}_1=\mathbf{u}$ , 再由式(22)得  $\mathbf{H}_1$ :

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{E} - 2\mathbf{u}_1\mathbf{u}_1^T \quad (24)$$

式中  $\mathbf{E}$  为  $L$  阶单位阵。

用  $\mathbf{H}_1$  左乘矩阵  $\mathbf{A}$  得到:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{H}_1 \mathbf{A} = [\boldsymbol{\beta}_1^{(1)}, \boldsymbol{\beta}_2^{(1)}, \dots, \boldsymbol{\beta}_L^{(1)}] \quad (25)$$

故  $\boldsymbol{\beta}_1^{(1)}$  中仅有第 1 个元素非零, 等于  $(\sum_{k=1}^L \beta_{k,1}^2)^{1/2}$ , 其他元素均为零。

2) 对  $\mathbf{A}_1$  的第 2 列进行变换。令  $\mathbf{x}=[\beta_{2,2}^{(1)}, \beta_{3,2}^{(1)}, \dots, \beta_{L,2}^{(1)}]^T$ , 同理由式(20)得到  $L-1$  维向量  $\mathbf{u}$ , 再令  $\mathbf{u}_2=[0, \mathbf{u}^T]^T$ , 从而得到变换矩阵  $\mathbf{H}_2$ :

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{E} - 2\mathbf{u}_2\mathbf{u}_2^T \quad (26)$$

用  $\mathbf{H}_2$  左乘矩阵  $\mathbf{A}_1$  得到:

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{H}_2 \mathbf{A}_1 = [\boldsymbol{\beta}_1^{(2)}, \boldsymbol{\beta}_2^{(2)}, \dots, \boldsymbol{\beta}_L^{(2)}] \quad (27)$$

易知  $\boldsymbol{\beta}_1^{(2)} = \boldsymbol{\beta}_1^{(1)}$ ; 第 2 列满足  $\beta_{2,1}^{(2)} = \beta_{2,1}^{(1)}$ ,  $\beta_{2,2}^{(2)} = [\sum_{k=2}^n (\beta_{k,2}^{(1)})^2]^{1/2}$ ,  $\beta_{k,2}^{(2)} = 0$ ,  $k=3, 4, \dots, L$ 。

由  $\mathbf{A}$  的秩为 2 可得矩阵  $\mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 \mathbf{A}$  的秩也为 2。故从矩阵  $\mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 \mathbf{A}$  的第 3 列到第  $L$  列, 仿照第 2 列的步骤做 Householder 变换, 使得每列变换后的第 1 个元素保持不变, 第 2 个元素为一个非零值, 该列其他元素均为 0。

因此, 共经过  $L$  次 Householder 变换后, 可将矩阵  $\mathbf{A}$  变换为形如  $\mathbf{R}$  的矩阵, 即

$$\mathbf{H}_n \mathbf{H}_{n-1} \cdots \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1 \mathbf{A} = \mathbf{R} \quad (28)$$

记  $\mathbf{H}=\mathbf{H}_n \mathbf{H}_{n-1} \cdots \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_1$ , 则所求正交阵  $\mathbf{Q}=\mathbf{H}^T$ 。

#### 1.3.2 $\mathbf{R}$ 阵的分解

可将 1.3.1 中得到的  $\mathbf{R}$  阵分解为  $\mathbf{R}=\mathbf{AR}'$ 。其中  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{R}'$  具有如下形式:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} v_1 & & & & \\ & v_2 & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad (29)$$

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} \mathbf{R}'_1 & \mathbf{R}'_2 \\ 0 & \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad (30)$$

式中:  $\mathbf{R}'_1$  为  $2 \times 2$  的单位上三角矩阵;  $\mathbf{R}'_2$  为  $2 \times (L-2)$  的满阵;  $\mathbf{E}$  为  $(L-2)$  阶方阵。记  $\mathbf{R}'$  中第  $i$  行第  $j$  列元素为  $b_{ij}$ 。

利用矩阵乘法, 可求得  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{R}'$  中各元素的值:

$$\begin{cases} v_1 = r_{11} \\ r_{1j} = v_1 b_{1j} \Rightarrow b_{1j} = r_{1j} / r_{11}, \quad j=2, 3, \dots, L \\ v_2 = r_{22} \\ r_{2j} = v_2 b_{2j} \Rightarrow b_{2j} = r_{2j} / r_{22}, \quad j=3, 4, \dots, L \end{cases} \quad (31)$$

由此可知, 由  $\mathbf{R}$  可求得唯一的  $\mathbf{AR}'$  分解。

### 1.3.3 相似变换

利用 1.3.2 节中得到的上三角单位阵  $\mathbf{R}'$  对  $\mathbf{A}$  进行相似变换, 得到  $\mathbf{A}'$ , 即

$$\mathbf{A}' = \mathbf{R}' \mathbf{A} \mathbf{R}'^{-1} = \mathbf{R}' \mathbf{Q} \mathbf{R}'^{-1} = \mathbf{R}' \mathbf{Q} \mathbf{A} \mathbf{R}'^{-1} = \mathbf{R}' \mathbf{Q} \mathbf{A} \quad (32)$$

由  $\mathbf{A}$  的形式可知,  $\mathbf{A}' = \mathbf{R}' \mathbf{Q} \mathbf{A}$  具有如下形式:

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{L1} & c_{L2} & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (33)$$

即  $\mathbf{A}'$  仅有前 2 列可以为非零元。并且由相似变换的性质可知,  $\mathbf{A}'$  与  $\mathbf{A}$  具有相同的特征根, 于是求  $\mathbf{A}$  的特征根问题等价于求  $\mathbf{A}'$  的特征根。

注意: 式(32)中的  $\mathbf{R}'^{-1}$  可用分块矩阵的求逆运算得到, 这样可以降低运算量。此处给出结果:

将  $\mathbf{R}'$  按如下形式进行分块

$$\mathbf{R}' = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{2 \times 2} & \mathbf{X}_{2 \times (L-2)} \\ 0 & \mathbf{E}_{(L-2) \times (L-2)} \end{bmatrix} \quad (34)$$

则  $\mathbf{R}'^{-1}$  为

$$\mathbf{R}'^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1} & -\mathbf{X}_{2 \times 2}^{-1} \mathbf{X}_{2 \times (L-2)} \\ 0 & \mathbf{E}_{(L-2) \times (L-2)} \end{bmatrix} \quad (35)$$

### 1.3.4 2 阶方阵的确定

取  $\mathbf{A}'$  的顺序 2 阶主子矩阵, 并记为  $\mathbf{D}$ , 则方阵  $\mathbf{D}$  的特征根即为  $\mathbf{A}'$  的 2 个非零特征根。

证明: 由特征根的定义,  $L$  阶方阵  $\mathbf{A}'$  和 2 阶方阵  $\mathbf{D}$  的特征方程分别为

$$[\lambda^2 - (c_{11} + c_{22})\lambda + c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}] \lambda^{n-2} = 0 \quad (36)$$

$$\lambda^2 - (c_{11} + c_{22})\lambda + c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21} = 0 \quad (37)$$

对比式(36)和(37)即得证。

设式(37)的 2 个根为  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$ , 结合式(18)可得: 工频相量  $p_1$  和  $p_2$  分别等于  $1/\lambda_1$  和  $1/\lambda_2$ 。

### 1.3.5 降阶小结

本节中, 利用矩阵分解得到式(30)所示的单位上三角矩阵  $\mathbf{R}'$ , 并按照式(32)对高阶方阵  $\mathbf{I}' \mathbf{U}$  进行相似变换, 然后得到一个 2 阶方阵  $\mathbf{D}$ , 使其具有待求特征根。

1.3.1 与 1.3.2 节中矩阵分解的计算量很小, 而 1.3.3 节中做相似变换时需要求  $\mathbf{R}'$  阵逆, 也被转化为求一个 2 阶矩阵  $\mathbf{D}$  的逆, 如式(34)和(35)所示, 计算量也不大。因此, 本节提出的降阶算法有效地降低了运算量。

## 2 仿真验证

### 2.1 各种谐波和衰减非周期分量的影响

#### 2.1.1 整次谐波的影响

在 Matlab 中实现本文提出的快速提取(fast extraction, FE)算法。本节首先利用 FE 算法对含整次谐波、非整次谐波和直流衰减分量的信号进行测量, 验证 FE 算法的正确性。然后, 通过仿真观察数据窗长和采样频率对 FE 算法的影响。最后, 与常用的傅氏算法和 LS 算法进行对比, 总结 FE 算法的性能。

本节中, 若无特殊说明, 所有仿真的采样频率取 10 kHz, 数据窗取半个周波, 测量误差取 0~0.04 s 内连续测量中的最大误差。

设输入信号表达式为

$$i_1(t) = 100\cos(\omega_0 t) + 20\cos(2\omega_0 t + \pi/3) + 10\cos(3\omega_0 t + \pi/4)$$

式中取  $\omega_0 = 2\pi f_0$ ,  $f_0 = 50$  Hz。测量结果如图 1 所示。

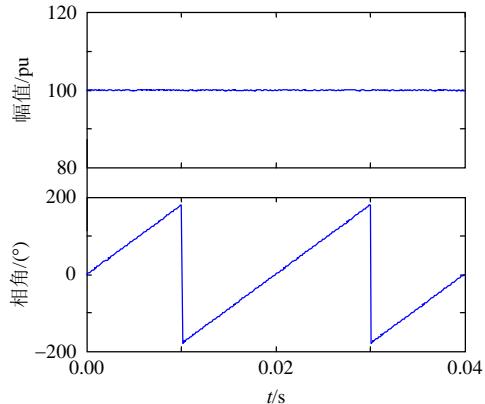


图 1 对含整次谐波信号进行滑窗测量的结果

Fig. 1 Sliding window analysis when measuring signal with integral harmonics

由图 1 可以看出, 用 FE 算法测量的结果准确、稳定, 不受整数次谐波的影响, 最大幅值误差小于  $4 \times 10^{-9}\%$ , 最大相位误差小于  $2 \times 10^{-9}\circ$ 。

#### 2.1.2 非整次谐波的影响

设输入信号

$$i_2(t) = 100\cos(\omega_0 t) + 20\cos(1.6\omega_0 t + \pi/3) + 10\cos(3.35\omega_0 t + \pi/4)$$

仿真结果(与图 1 几乎一样, 故略)表明, 测量结果准确、稳定, 最大幅值误差小于  $8 \times 10^{-9}\%$ , 最大相位误差小于  $3 \times 10^{-9}\circ$ 。这表明 FE 算法不受非整次谐波分量的影响。

#### 2.1.3 衰减非周期分量的影响

设输入信号

$$i_3(t) = 100 \cos(\omega_0 t) + 20 \cos(1.6\omega_0 t + \pi/3) + 20 \cos(2\omega_0 t + \pi/4) + 10 \cos(3.35\omega_0 t + \pi/3) + A e^{-t/\tau}$$

令  $A$  和  $\tau$  取不同的值, 测量结果如表 1 所示, 在不同时间常数和衰减初始幅值下, 相量提取的最大幅值误差不超过 0.1%, 最大相位误差不超过 0.1°。故 FE 算法会受到衰减非周期分量的影响, 但影响很小。

表 1 含不同时间常数和衰减初始幅值的直流分量时的测量结果

Tab. 1 Calculation results of signals with different DC damping constants and initial magnitudes

$A$	$\tau/\text{ms}$	$e_{\text{mag}}/\%$	$e_{\text{ang}}/(\text{°})$
5	50	0.100	0.053
	100	0.068	0.053
	200	0.060	0.037
10	50	0.051	0.031
	100	0.046	0.026
	200	0.053	0.040
20	50	0.059	0.036
	100	0.049	0.023
	200	0.039	0.024

#### 2.1.4 衰减余弦分量的影响

设输入信号

$$i_4(t) = 100 \cos(\omega_0 t) + A e^{-t/\tau} [\cos(1.6\omega_0 t + \pi/3) + \cos(2\omega_0 t + \pi/4) + \cos(3.35\omega_0 t + \pi/3)]$$

按 2.1.3 节取不同的  $A$  和  $\tau$ , 经仿真可以得到在不同时间常数和衰减初始幅值下, 相量提取的最大幅值误差不超过 0.002%, 最大相位误差不超过 0.002°。故 FE 算法会受到衰减余弦分量的影响很小。

#### 2.2 数据窗长的影响

对信号  $i_3(t)$ , 取  $A=10$ ,  $\tau=100$ , 令数据窗从 9 ms 到 20 ms 变化, 测量结果如表 2 所示。由表 2 可以看出: 数据窗长为基波周期的非整数倍时, 计算结果依然很精确; 随着数据窗的增长, 测量算法的抗

表 2 不同数据窗长时的测量结果

Tab. 2 Calculation results of the signal using different lengths of the data window

数据窗长/ms	$e_{\text{mag}}/\%$	$e_{\text{ang}}/(\text{°})$
9	0.325	0.271
10	0.046	0.026
12	0.002	0.001
15	0	0
18	0	0
20	0	0

噪声能力逐渐增强, 测量结果越精确。

因为采样频率一定时, 数据窗越长, 采样点数就越多, 从而采样点包含信号中的平稳分量所占的比例越大, 故信号估计的精度就越高。

#### 2.3 采样频率的影响

对 2.2 节中的信号, 数据窗取 10 ms, 采样频率分别取为 2、4 和 10 kHz, 测量结果如表 3 所示。由表 3 可以看出: 采样率为 2 kHz 时, 精度相对较差; 采样率提高至 4 kHz 时, 精度有提高; 采样率提高至 10 kHz 时, 精度最好。故随着采样率的提高, 精度也会更高。

表 3 不同采样频率时的测量结果

Tab. 3 Calculation results of the signal using different sampling rate

采样频率/kHz	$e_{\text{mag}}/\%$	$e_{\text{ang}}/(\text{°})$
2	0.254	0.115
4	0.046	0.042
10	0.046	0.026

#### 2.4 与其他算法对比

##### 2.4.1 滤除各类谐波、衰减非周期分量的性能对比

本小节中, 将对比 FE 算法与常用的傅氏算法、LS 算法的性能。

对于傅氏算法, 当时间窗为一个周波时, 用全周傅氏算法来计算; 当时间窗为半个周波时, 用半周傅氏算法来计算。这里统称傅氏算法。

对于 LS 算法, 函数模型选为工频分量、小于 5 次的各整数次谐波分量及非周期分量的组合<sup>[24]</sup>。

取采样频率为 10 kHz, 数据窗长为一个周波, 用傅氏算法、LS 算法和 FE 算法在 40 ms 内分别连续测量信号  $i_1(t)$ 、 $i_2(t)$ 、 $i_3(t)$  和  $i_4(t)$ , 测量结果与真值的最大误差如表 4 所示。

表 4 数据窗为一个周波时与其他算法的性能对比

Tab. 4 Error comparison to other methods when the data window is one cycle

算法	$i_1(t)$		$i_2(t)$		$i_3(t)$		$i_4(t)$	
	$e_{\text{mag}}/\%$	$e_{\text{ang}}/(\text{°})$	$e_{\text{mag}}/\%$	$e_{\text{ang}}/(\text{°})$	$e_{\text{mag}}/\%$	$e_{\text{ang}}/(\text{°})$	$e_{\text{mag}}/\%$	$e_{\text{ang}}/(\text{°})$
傅氏	0	0	13.738	7.906	14.056	7.894	14.588	7.633
LS	0	0	26.479	40.842	26.862	42.604	26.122	43.254
FE	0	0	0	0	0	0	0	0

##### 2.4.2 短数据窗时的性能对比

取数据窗长为半个周波, 重复 2.4.1 节中的测量, 测量结果与真值的最大误差如表 5 所示。

对于傅氏算法和 LS 算法, 通过表 4、5 可以看出: 若输入信号中仅含有整数次谐波, 这 2 种算法

表5 数据窗为半个周波时与其他算法的性能对比

Tab. 5 Error comparison to other methods when the data window is half-cycle

算法	$i_1(t)$		$i_2(t)$		$i_3(t)$		$i_4(t)$	
	$e_{mag}/\%$	$e_{ang}/(^{\circ})$	$e_{mag}/\%$	$e_{ang}/(^{\circ})$	$e_{mag}/\%$	$e_{ang}/(^{\circ})$	$e_{mag}/\%$	$e_{ang}/(^{\circ})$
傅氏	0	0	20.443	12.749	37.739	15.961	15.383	7.108
LS	0	0	48.041	82.217	51.046	83.880	29.136	61.035
FE	0	0	0	0	0.046	0.026	0	0

提取的工频相量没有误差；若输入信号中含有非整数次谐波或非周期衰减分量，这2种算法均会有很大的误差；当数据窗变短时，它们的误差会更大。

对于FE算法，通过表4和表5可以看出：各类谐波及非周期衰减对测量结果几乎没有影响。用FE算法对含各种谐波和衰减直流分量的信号进行测量时，不但能保证很高的精度，而且当时间窗变短时，测量结果依然精确、稳定。

## 2.5 EMTP 仿真验证

在EMTP上搭建输电线路仿真模型，系统结构及参数与文献[21]中110kV系统相同。设0.2s时在距线路m端25km处发生A相接地故障，过渡电阻取 $10\Omega$ ，采样率取4kHz，数据窗取10ms，在0.2s到0.24s内对电流进行滑窗分析，并与传统傅氏算法、LS算法对比，测量结果如图2所示。

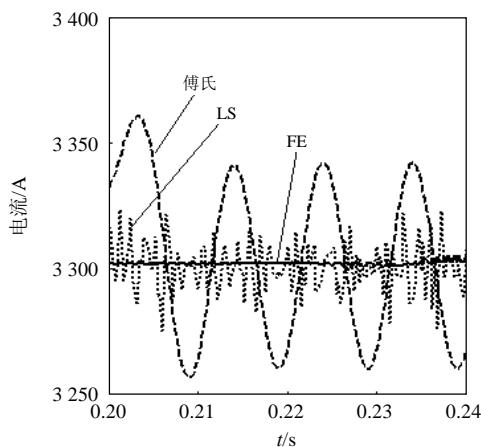


图2 单相接地故障时各种算法的测量结果

Fig. 2 Calculation results using different methods when single-phase to earth fault

由图2可以看出，当发生单相接地故障时，用傅氏算法或LS算法提取电流中工频分量幅值的误差较大。而FE算法的测量结果始终保持准确、稳定。

## 3 结论

本文提出了一种快速测量工频相量的方法，该方法具有以下特点：

1) 将求高阶矩阵特征根的问题转化为求2阶

矩阵特征根，计算量小。

2) 工频相量的测量结果不受整次和非整次谐波的影响，受衰减直流分量的影响很小。

3) 计算所使用数据窗越长，采样率越高，测量结果就越准确。

4) 与其他算法相比，本文算法在较短的数据窗内仍可准确地计算出工频相量的幅值和相位。

## 参考文献

- [1] 李斌, 李永丽, 贺家李. 一种提取基波分量的高精度快速滤波算法[J]. 电力系统自动化, 2006, 30(10): 39-43. Li Bin, Li Yongli, He Jiali, et al. Accurate and fast filtering algorithm for fundamental component [J]. Automation of Electric Power Systems, 2006, 30(10): 39-43(in Chinese).
- [2] 李欣然. 电力系统相量测量方法的研究[J]. 长沙电力学院学报: 自然科学版, 1997, 12(1): 72-76. Li Xinran. The study on philosophy of measurement of phasor in power system[J]. Journal of Changsha University of Electric Power: Natural Science, 1997, 12(1): 72-76(in Chinese).
- [3] Phadke A G. Synchronized phasor measurements in power systems[J]. IEEE Computer Applications in Power, 1993, 6(2): 10-15.
- [4] Hart D, Novosel D, Hu Y, et al. A new frequency tracking and phasor estimation algorithm for generator[J]. IEEE Trans. on Power Delivery, 1997, 12(3): 1064-1073.
- [5] Masoud K G, Ooi B T, Bakhshai A. Investigation of DFT-based phasor measurement algorithm[C]/IEEE Power and Energy Society General Meeting. Minneapolis, MN, USA: IEEE PES, 2010: 1-6.
- [6] Yang J Z, Liu C W. A precise calculation of power system frequency and phasor[J]. IEEE Trans. on Power Delivery, 2000, 15(2): 494-499.
- [7] Wang M H, Sun Y Z. A practical, precise method for frequency tracking and phasor estimation[J]. IEEE Trans. on Power Delivery, 2004, 19(4): 1547-1552.
- [8] Darwish H A, Fikri M. Practical considerations for recursive DFT implementation in numerical relays [J]. IEEE Trans. on Power Delivery, 2007, 22(1): 42-49.
- [9] Sidhu T S, Zhang X D, Balamourougan V, et al. A new half-cycle phasor estimation algorithm[J]. IEEE Trans. on Power Delivery, 2005, 20(2): 1299-1305.
- [10] Kang S H, Lee D G, Nam S R, et al. Fourier transform-based modified phasor estimation method immune to the effect of the DC offsets[J]. IEEE Trans. on Power Delivery, 2009, 24(3): 1104-1111.
- [11] 索南加乐, 焦在滨, 康小宁, 等. Y/Δ接线变压器漏感

- 参数的识别方法[J]. 中国电机工程学报, 2008, 28(13): 84-90.
- Suonan Jiale, Jiao Zaibin, Kang Xiaoning, et al. Algorithm to identify leakage inductances of power transformer with Y-delta connection[J]. Proceedings of the CSEE, 2008, 28(13): 84-90(in Chinese).
- [12] 索南加乐, 王莉, 夏经德, 等. 特高压交流线路故障谐波分析[J]. 高电压技术, 2010, 36(1): 37-43.
- Suonan Jiale, Wang Li, Xia Jingde, et al. Harmonic analysis of fault signal in UHV AC transmission line[J]. High Voltage Engineering, 2010, 36(1): 37-43(in Chinese).
- [13] Hua Y B, Sarkar T K. Matrix pencil for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise[J]. IEEE Trans. on Acoustics, Speech, and Signal Processing, 1990, 38(5): 814-824.
- [14] Sarkar T K, Pereira O. Using the matrix pencil method to estimate the parameters of a sum of complex exponentials [J]. IEEE Antennas and Propagation Magazine, 1995, 37(1): 48-55.
- [15] Hua Y B, Sarkar T K. Matrix pencil and its performance[C]//International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing. New York, NY, USA: IEEE Acoustics, Speech and Signal Processing Society, 1988: 2467-2479.
- [16] 麦瑞坤, 何正友, 薄志谦, 等. 动态条件下的同步相量测量算法的研究[J]. 中国电机工程学报, 2009, 29(10): 52-58.
- Mai Ruikun, He Zhengyou, Bo Zhiqian, et al. Research on synchronized phasor measurement algorithm under dynamic conditions[J]. Proceedings of the CSEE, 2009, 29(10): 52-58(in Chinese).
- [17] Mai R K, He Z Y, Fu L, et al. Dynamic phasor and frequency estimator for phasor measurement units[J]. IET Generation, Transmission & Distribution, 2010, 4(1): 73-83.
- [18] Wang C, Wang F Z. A high-precision algorithm for phasor measurement using mathematical morphology[C]//Asia-Pacific Power and Energy Engineering Conference. Chengdu, Sichuan Province, China: IEEE Power & Energy Society, 2010: 1-4.
- [19] Liu L, Lin T, Cao J, et al. A novel algorithm for synchronized phasor measurement based on time-frequency transform[C]//International Conference on Power System Technology . Hangzhou , Zhejiang Province , China : Chinese Society for Electrical Engineering, 2010: 1-6.
- [20] Lin T, Domijan A. Novel complex filter with recursive algorithm for phasor computation in power-quality monitoring[J]. IEE Proceedings: Generation, Transmission & Distribution, 2006, 153(3): 283-290.
- [21] 索南加乐, 王增超, 张健康, 等. 基于参数识别的高阻接地距离保护算法[J]. 中国电机工程学报, 2011, 31(31): 173-178.
- Suonan Jiale, Wang Zengchao, Zhang Jiankang, et al. A novel distance protection algorithm for high resistance grounding faults based on parameter identification [J]. Proceedings of the CSEE, 2011, 31(31): 173-178(in Chinese).
- [22] 何立志. 工频量快速测量方法的研究[J]. 电测与仪表, 2001, 38(424): 12-17.
- He Lizhi. The research of the fast-measuring methods for main frequency parameters[J]. Electrical Measurement & Instrumentation, 2001, 38(424): 12-17(in Chinese).
- [23] 周杰. 矩阵分析及应用[M]. 成都: 四川大学出版社, 2008: 119-127, 175-213.
- Zhou Jie . Matrix analysis and its application [M] . Chengdu: Press of Sichuan University, 2008: 119-127, 175-213(in Chinese).
- [24] 束洪春. 电力工程信号处理应用[M]. 北京: 科学出版社, 2009: 62-63, 186-187.
- Shu Hongchun . Signal processing in electric power engineering and it's application[M] . Beijing: Science Press, 2009: 62-63, 186-187(in Chinese).



索南加乐

收稿日期: 2012-05-04。

作者简介:

索南加乐(1960), 男, 博士, 教授, 博士生导师, 从事电力系统继电保护的教学与研究工作, relay@mail.xjtu.edu.cn;  
王斌(1988), 男, 硕士研究生, 研究方向为电力系统继电保护、数字信号处理, wangbin.dianqi@gmail.com。

(责任编辑 刘浩芳)