

一种用于分解协调无功优化的全分邻近中心算法

李智, 杨洪耕

(四川大学电气信息学院, 四川省 成都市 610065)

A Full Decomposition Proximal Center Algorithm for Decomposition and Coordination of Reactive Power Optimization

LI Zhi, YANG Honggeng

(School of Electrical Engineering and Information, Sichuan University, Chengdu 610065, Sichuan Province, China)

ABSTRACT: Aiming at the inseparable problem of the augmented Lagrangian function of decomposition-coordination model of reactive power optimization, on the basis of proximal center algorithm, a full decomposition proximal center algorithm which can make all steps separated for optimization problems which contain special equality constraints was proposed. The algorithm constructs smooth and decomposable Lagrangian function using proximal function and updates Lagrangian multipliers using optimal gradient. It can be used for decomposition and coordination of reactive power optimization of the whole network, which only needs to exchange the information of boundary nodes between adjacent sub-areas. Compared with the algorithms which update Lagrangian multipliers using dual gradient, it can choose the parameters used unambiguously and improve the computing speed significantly. The simulation shows the algorithm can realize decomposition and coordination of reactive power optimization of the whole network, and its computational efficiency is much higher than the decomposition and coordination algorithm based on auxiliary problem principle.

KEY WORDS: reactive power optimization; decomposition and coordination; Lagrangian; smoothness; optimal gradient; proximal center algorithm

摘要: 针对无功优化分解协调模型求解中增广拉格朗日函数不可分的问题, 在邻近中心算法基础上提出一种适用于特殊等式约束优化问题、可实现所有步骤分解计算的全分邻近中心算法。该算法通过邻近函数构造平滑同时可分的拉格朗日函数, 并通过最优梯度更新拉格朗日乘子, 只需要在相邻分区之间交换边界节点信息即可实现全网无功优化的分解协调计算。与通过对偶梯度更新拉格朗日乘子的分解算法相比, 它不但可以直接确定计算所用参数, 而且可以大大提高收敛速度。算例结果表明, 所提算法可以实现全网无功优化的分解协调计算, 并且其计算效率远高于基于辅助问题原理的分解协调算法。

关键词: 无功优化; 分解协调; 拉格朗日; 平滑; 最优梯度; 邻近中心算法

0 引言

无功优化对电力系统的经济安全运行至关重要。电网是相互联系的整体, 各分层分区控制中心独立的无功优化不能求得全网最优解。集中式无功优化能求得全网最优解, 但随着电网规模的不断扩大, 其存在的计算机内存不足、计算速度慢和数据传输瓶颈等问题愈发严重, 无功优化分解协调算法因此成为该领域的一个研究方向。上世纪末期就出现的无功优化分解算法^[1-2]需要全网信息用于协调层的计算。近年来, 文献[3-13]采用各种技术实现了无功优化的分解计算, 可以有效提高全网无功优化的计算效率, 都有各自的特点, 不过也都存在一定的局限, 基于协同进化的智能优化算法^[3-6]需要全网信息用于适应度评估, 外网等值方法^[7-8]需要全网信息求取初始的等值参数, 基于矩阵结构的算法^[9]在计算中每个分区都要用到所有其它分区的信息, 上述算法由于需要全网信息或过多其它分区信息而未能有效解决数据传输瓶颈问题; 矩阵解耦方法^[10]的计算效率和结果受系统耦合程度影响; 计算速度很快的分解协调内点法^[11]需要各分区都采用内点法进行优化, 而目前各控制中心都已安装电压无功优化控制系统并且不一定采用内点法的现状使其不易推广应用。文献[12-13]将辅助问题原理(auxiliary problem principle, APP)用于无功优化分解协调模型求解, 实现了分解协调无功优化, 具有数据通信量小以及各分区可自主选择优化算法等优点, 该方法也被广泛应用于电力系统其它领域^[14-16], 但其提高

的计算效率有限，有必要寻求一种更高效先进的无功优化分解协调算法以满足电网规模不断扩大带来的需求。

本文将基于邻近中心算法，针对具有特殊等式约束结构的无功优化分解协调模型，提出可实现所有步骤分解计算的全分邻近中心算法。该算法可用于无功优化分解协调模型求解，只需要在相邻分区之间交换边界节点信息，可解决全网优化的计算速度慢和数据传输瓶颈问题，不仅各控制中心可以自主选择优化算法，还可以直接确定计算所用参数，而且计算效率比基于辅助问题原理的分解协调算法更高。

1 全网无功优化的分解协调计算

电力系统无功优化的目的是通过调节发电机机端电压、有载调压变压器分接头位置和无功补偿装置出力等来降低有功损耗，并保持电压水平最好，其模型可简单描述为：

$$\min_{x \in X^f} f(x) \quad (1)$$

式中： x 为系统变量，包括控制变量和状态变量； $f(x)$ 为系统有功损耗函数； X^f 为由系统变量的等式约束和不等式约束构成的可行域。

基于文献[17]的电网分解思想，即在连接两个区域的联络线间新增虚拟的无源节点后通过节点复制并新增约束的方式将电网分解，文献[12]给出了两分区无功优化分解协调模型。文献[13]在此基础上给出了包含 Δ -变量的多分区无功优化分解协调模型：

$$\begin{cases} \min_{(x_i, x_{bi}) \in X_i^f} f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i, x_{bi}) \\ \text{s.t. } \Theta(x_b, \Delta\delta) = (x_{bij} + v\Delta\delta_i) - (x_{bjj} + v\Delta\delta_j) = 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中：n 为分区个数； $i=1,2,\dots,n$ ； $j=i+1,\dots,n$ ； x_i 和 x_{bi} 分别为第 i 个分区的内部变量和边界变量； X_i^f 表示第 i 个分区变量 (x_i, x_{bi}) 的可行域； x_{bij} 和 x_{bjj} 为第 i 个与第 j 个分区间边界节点分别在两个分区注入有功、注入无功、电压幅值和电压相角构成的向量 $(P_{bij} \ Q_{bij} \ U_{bij} \ \theta_{bij})^T$ 和 $(-P_{bij} \ -Q_{bij} \ U_{bij} \ \theta_{bij})^T$ ； v 为维数与 x_{bij} 对应一致的向量 $(0 \ 0 \ 0 \ 1)^T$ ； $\Delta\delta_i$ 和 $\Delta\delta_j$ 分别为第 i 个分区与第 j 个分区的平衡节点相对于全网平衡节点的电压相角差。

对于类似模型式(2)的带约束优化问题，可通过经典拉格朗日松弛(classical Lagrangian relaxation，

CLR)或增广拉格朗日松弛(augmented Lagrangian relaxation, ALR)将其转化为鞍点问题进行求解。但是，CLR 方法的收敛性较差，并且可能无法得到原问题的最优解，因此常用 ALR 方法求解式(2)。然而，ALR 方法引进的二次项是不可分的，从而存在不能直接进行分解计算的问题。文献[12-13]利用 APP 解决 ALR 方法的不可分问题，采用 ALR 和 APP 相结合的方法实现全网无功优化的分解协调计算，计算中通过对偶梯度更新拉格朗日乘子，但对收敛性影响很大的罚参数和步长参数不易确定。

2 全分邻近中心算法

2.1 常规邻近中心算法

邻近中心算法^[18-19]通过邻近函数构造平滑同时可分的拉格朗日函数，并在计算中通过最优梯度更新拉格朗日乘子。以带约束可分解优化问题式(3)为例：

$$\begin{cases} \min_{x_i \in X_i^f} f(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) \\ \text{s.t. } \sum_{i=1}^n A_i x_i = 0 \end{cases} \quad (3)$$

式中：n 为子系统的个数； X_i^f 表示变量 x_i 的可行域； A_i 为等式约束中变量 x_i 的系数矩阵。

设 $d_i(x_i)$ 是在 X_i^f 上的非负连续强凸函数，对应的凸参数为 σ_i ， $d_i(x_i)$ 也被称为邻近函数。能使邻近函数取得最小值时变量 x_i 的值，被称为邻近函数的中心。选择适当的邻近函数附加到 CLR 的拉格朗日函数上，可得到一个新的拉格朗日函数及对应的对偶函数：

$$L(x, \lambda) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i) + \left\langle \lambda, \sum_{i=1}^n A_i x_i \right\rangle + c \sum_{i=1}^n d_i(x_i) \quad (4)$$

$$f_d(\lambda) = \min_{x_i \in X_i^f} L(x, \lambda) \quad (5)$$

式中： $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示两个向量的内积；c 为正的平滑参数。

文献[18]已证明，可分的 $f_d(\lambda)$ 是连续可微的凹函数，并且它的梯度 $\nabla f_d(\lambda)$ 是利普希茨连续的，对应的利普希茨常数为

$$l = \frac{1}{c} \sum_{i=1}^n \frac{\|A_i\|^2}{\sigma_i} \quad (6)$$

式中 $\|\cdot\|$ 表示矩阵的欧式范数。由于 X_i^f 是紧集，从而可选定正的有限常数 D_i 满足：

$$D_i \geq \max_{x_i \in X_i^f} d_i(x_i) \quad (7)$$

定义向量 \mathbf{u} 和 \mathbf{v} 作拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}$ 计算过程中的中间变量, 邻近中心算法的第 k 次迭代计算过程为:

1) 根据式(8)并行计算 \mathbf{x}_i^{k+1} 。

$$\mathbf{x}_i^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}_i^f} \{f_i(\mathbf{x}_i) + \langle \boldsymbol{\lambda}^k, \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \rangle + cd_i(\mathbf{x}_i)\} \quad (8)$$

2) 根据式(9)和(10)计算 $\nabla f_d(\boldsymbol{\lambda}^k)$ 及 $f_d(\boldsymbol{\lambda}^k)$ 。

$$\nabla f_d(\boldsymbol{\lambda}^k) = \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i^{k+1} \quad (9)$$

$$f_d(\boldsymbol{\lambda}^k) = L(\mathbf{x}^{k+1}, \boldsymbol{\lambda}^k) \quad (10)$$

3) 根据式(11)和(12)计算 \mathbf{u}^k 。

$$\bar{\mathbf{u}}^k = \arg \max_{\boldsymbol{\lambda}} \{ \langle \nabla f_d(\boldsymbol{\lambda}^k), \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^k \rangle - \frac{l}{2} \|\boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^k\|^2 \} \quad (11)$$

$$\mathbf{u}^k = \arg \max_{\boldsymbol{\lambda} \in (\bar{\mathbf{u}}^k, \mathbf{u}^{k-1}, \boldsymbol{\lambda}^k)} f_d(\boldsymbol{\lambda}) \quad (12)$$

4) 根据式(13)计算 \mathbf{v}^k 。

$$\mathbf{v}^k = \arg \max_{\boldsymbol{\lambda}} \{ -\frac{l}{2} \|\boldsymbol{\lambda}\|^2 + \sum_{t=0}^k \frac{t+1}{2} \langle \nabla f_d(\boldsymbol{\lambda}^t), \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^t \rangle \} \quad (13)$$

5) 根据式(14)计算 $\boldsymbol{\lambda}^{k+1}$ 。

$$\boldsymbol{\lambda}^{k+1} = \frac{k+1}{k+3} \mathbf{u}^k + \frac{2}{k+3} \mathbf{v}^k \quad (14)$$

基于估计序列理念, 式(11)–(14)通过递归计算 3 个序列 \mathbf{u}^k 、 \mathbf{v}^k 和 $\boldsymbol{\lambda}^k$ 来更新拉格朗日乘子。所求序列满足如下关系:

$$\begin{aligned} & \frac{(k+1)(k+2)}{4} f_d(\mathbf{u}^k) \geq \\ & \max_{\boldsymbol{\lambda}} \left\{ -\frac{l}{2} \|\boldsymbol{\lambda}\|^2 + \sum_{t=0}^k \frac{t+1}{2} \langle \nabla f_d(\boldsymbol{\lambda}^t), \boldsymbol{\lambda} - \boldsymbol{\lambda}^t \rangle \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

式(11)是计算序列 \mathbf{u}^k 的主要公式, 可保证关系式(15)在 $k=0$ 时成立; 式(12)用于保证序列 \mathbf{u}^k 的单调性; 式(13)和(14)可保证关系式(15)在任意迭代次数 $k>0$ 时成立。与传统通过对偶梯度更新 $\boldsymbol{\lambda}$ 的分解算法相比, 式(15)的成立能使该算法在收敛速度方面有数量级上的改进^[18-20]; 而且该算法可以直接根据对偶间隙的裕度 ε (本文取为 0.01)利用式(16)确定平滑参数 c 的取值。

$$c = \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^n D_i} \quad (16)$$

2.2 全分邻近中心算法

常规邻近中心算法虽然实现了原问题的并行

分解计算, 但不能对拉格朗日乘子 $\boldsymbol{\lambda}^{k+1}$ 的计算进行分解。本文针对与模型式(2)类似具有特殊等式约束的优化问题, 提出全分邻近中心算法, 可同时实现 $\boldsymbol{\lambda}^{k+1}$ 的分解计算。

设式(3)等式约束中每一个等式仅含有不同子系统的两个变量, 则常规邻近中心算法拉格朗日函数中第 i 个子系统变量 \mathbf{x}_i 的系数矩阵 \mathbf{A}_i 是高度稀疏的。设 $\boldsymbol{\lambda}_{ij}$ 为第 i 个子系统与第 j 个子系统间等式约束对应的拉格朗日乘子向量, $\boldsymbol{\lambda}_i$ 为所有与第 i 个子系统有关的拉格朗日乘子构成的向量, 即 $\boldsymbol{\lambda}_i = (\boldsymbol{\lambda}_{i1}^\top \quad \boldsymbol{\lambda}_{i2}^\top \quad \cdots \quad \boldsymbol{\lambda}_{i(i-1)i}^\top \quad \boldsymbol{\lambda}_{i(i+1)}^\top \quad \cdots \quad \boldsymbol{\lambda}_{in}^\top)^\top$, 则有

$$\left\langle \boldsymbol{\lambda}, \sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n \boldsymbol{\lambda}_{ij} [\mathbf{B}_{ij} \mathbf{x}_i + \mathbf{B}_{ji} \mathbf{x}_j] = \sum_{i=1}^n \langle \boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{B}_i \mathbf{x}_i \rangle \quad (17)$$

式中: \mathbf{B}_{ij} 和 \mathbf{B}_{ji} 为第 i 个子系统与第 j 个子系统间等式约束对应的系数矩阵; 系数矩阵 $\mathbf{B}_i = [\mathbf{B}_{i1}^\top \quad \mathbf{B}_{i2}^\top \quad \cdots \quad \mathbf{B}_{i(i-1)}^\top \quad \mathbf{B}_{i(i+1)}^\top \quad \cdots \quad \mathbf{B}_{in}^\top]^\top$, 表示全分邻近中心算法拉格朗日函数中第 i 个子系统变量 \mathbf{x}_i 的系数矩阵。由于 $\langle \boldsymbol{\lambda}, \mathbf{A}_i \mathbf{x}_i \rangle = \langle \boldsymbol{\lambda}_i, \mathbf{B}_i \mathbf{x}_i \rangle$, 从而式(8)等价于

$$\mathbf{x}_i^{k+1} = \arg \min_{\mathbf{x}_i \in \mathbf{X}_i^f} \{f_i(\mathbf{x}_i) + \langle \boldsymbol{\lambda}_i^k, \mathbf{B}_i \mathbf{x}_i \rangle + cd_i(\mathbf{x}_i)\} \quad (18)$$

由于 $\boldsymbol{\lambda}$ 中所有元素都相互独立, 根据 $\boldsymbol{\lambda}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{\lambda}$ 的关系可将式(9)和(11)分别分解为

$$\nabla f_{dij}(\boldsymbol{\lambda}_{ij}^k) = \mathbf{B}_{ij} \mathbf{x}_i^{k+1} + \mathbf{B}_{ji} \mathbf{x}_j^{k+1} \quad (19)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_{ij}^k = \arg \max_{\boldsymbol{\lambda}_{ij}} \{ \langle \nabla f_{dij}(\boldsymbol{\lambda}_{ij}^k), \boldsymbol{\lambda}_{ij} - \boldsymbol{\lambda}_{ij}^k \rangle - \frac{l}{2} \|\boldsymbol{\lambda}_{ij} - \boldsymbol{\lambda}_{ij}^k\|^2 \} \quad (20)$$

根据 $\boldsymbol{\lambda}_{ij}$ 与 $\boldsymbol{\lambda}_i$ 的关系, 可将式(19)、(20)分别整合为

$$\nabla f_{di} = (\nabla f_{d1i}^\top \quad \nabla f_{d2i}^\top \quad \cdots \quad \nabla f_{d(i-1)i}^\top \quad \nabla f_{di(i+1)}^\top \quad \cdots \quad \nabla f_{din}^\top)^\top \quad (21)$$

$$\bar{\mathbf{u}}_i^k = \arg \max_{\boldsymbol{\lambda}_i} \{ \langle \nabla f_{di}(\boldsymbol{\lambda}_i^k), \boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_i^k \rangle - \frac{l}{2} \|\boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_i^k\|^2 \} \quad (22)$$

同理, 同样可得:

$$f_{di}(\boldsymbol{\lambda}_i^k) = f_i(\mathbf{x}_i^{k+1}) + \langle \boldsymbol{\lambda}_i^k, \nabla f_{di}(\boldsymbol{\lambda}_i^k) \rangle + cd_i(\mathbf{x}_i^{k+1}) \quad (23)$$

$$\mathbf{u}_i^k = \arg \max_{\boldsymbol{\lambda} \in (\bar{\mathbf{u}}_i^k, \mathbf{u}_i^{k-1}, \boldsymbol{\lambda}_i^k)} \{ f_i(\mathbf{x}_i^{k+1}) + \langle \boldsymbol{\lambda}_i, \nabla f_{di}(\boldsymbol{\lambda}_i^k) \rangle + cd_i(\mathbf{x}_i^{k+1}) \} \quad (24)$$

$$\mathbf{v}_i^k = \arg \max_{\boldsymbol{\lambda}} \left\{ -\frac{l}{2} \|\boldsymbol{\lambda}_i\|^2 + \sum_{t=0}^k \frac{t+1}{2} \langle \nabla f_{di}(\boldsymbol{\lambda}_i^t), \boldsymbol{\lambda}_i - \boldsymbol{\lambda}_i^t \rangle \right\} \quad (25)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i^{k+1} = \frac{k+1}{k+3} \mathbf{u}_i^k + \frac{2}{k+3} \mathbf{v}_i^k \quad (26)$$

从而, 全分邻近中心算法可对整个计算过程进

行分解计算，在其第 k 次迭代计算过程中，首先根据式(18)并行计算 \mathbf{x}_i^{k+1} ，然后根据式(21)–(26)并行计算 $\boldsymbol{\lambda}_i^{k+1}$ 。全分邻近中心算法只是针对特殊等式约束情况下对常规邻近中心算法的等价变换，因此其所用参数的取值与后者相同。

3 采用全分邻近中心算法的分解协调无功优化

3.1 算法所用参数的确定

模型式(2)的等式约束可整合为

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{A}_i (\mathbf{x}_{bi} + \mathbf{v}_i \Delta \delta_i) = \mathbf{0} \quad (27)$$

式中： $\mathbf{x}_{bi} = (\mathbf{x}_{bi1}^T \ \mathbf{x}_{bi2}^T \ \cdots \ \mathbf{x}_{bi(i-1)}^T \ \mathbf{x}_{bi(i+1)}^T \ \cdots \ \mathbf{x}_{bin}^T)^T$ ； \mathbf{v}_i 为维数与 \mathbf{x}_{bi} 一致的向量，其中与 \mathbf{x}_{bi} 中电压相角对应行的元素为 1，其它元素为 0；系数矩阵 \mathbf{A}_i 包含 $(n^2/2 - n/2) \times (n-1)$ 个矩阵块，对于第 j ($j=1, 2, \dots, n-1$) 列的矩阵块，如果 $j < i$ ，则除该列中第 j 行的矩阵块为一个负的单位矩阵(阶数等于第 j 个分区与第 i 个分区间联络线数的 4 倍)外，其它行的矩阵块均为零矩阵，如果 $j \geq i$ ，则除该列中第 j 行的矩阵块为一个单位矩阵(阶数等于第 i 个分区与第 $j+1$ 个分区间联络线数的 4 倍)外，其它行的矩阵块均为零矩阵。根据文献[18-21]，邻近函数可选择为

$$d_i(\mathbf{x}_{bi}, \Delta \delta_i) = \frac{1}{2} \|(\mathbf{x}_{bi} + \mathbf{v}_i \Delta \delta_i) - (\mathbf{x}_{bi_0} + \mathbf{v}_i \Delta \delta_{i_0})\|^2 \quad (28)$$

式中： $\|\cdot\|$ 表示向量的欧式范数； \mathbf{x}_{bi_0} 和 $\Delta \delta_{i_0}$ 分别为变量 \mathbf{x}_{bi} 和 $\Delta \delta_i$ 的初始值，也是能使邻近函数取得最小值时变量 \mathbf{x}_{bi} 和 $\Delta \delta_i$ 的值。该邻近函数对应的凸参数 $\sigma_i = 1$ ，对应的正常数 D_i 与边界节点的个数有关。设每个边界节点在邻近函数中对应的欧式范数不大于 0.1 pu ，则平滑参数 c 的取值可确定为

$$c = \frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^n D_i} = \frac{0.01}{0.5 \times 0.01 \times N \times 2} = \frac{1}{N} \quad (29)$$

式中 N 为所有分区之间联络线的总数。由于根据 \mathbf{A}_i 的结构可知 $\|\mathbf{A}_i\|^2 = 1$ ，从而不难得出 $\nabla f_d(\boldsymbol{\lambda})$ 对应的利普希茨常数 $l = n/c = N \times n$ 。

3.2 分解协调无功优化的求解步骤

采用全分邻近中心算法可实现全网无功优化的分解协调计算。与式(3)相比，由于模型式(2)中包含了 Δ -变量，并且等式约束只与每个分区的边界变

量有关，因此其求解公式与 2.2 节中的公式稍有不同，只需用式(30)和(31)替换式(18)、用式(32)替换式(19)、用 $d_i(\mathbf{x}_{bi}^{k+1}, \Delta \delta_i^{k+1})$ 替换式(23)和(24)中的 $d_i(\mathbf{x}_i^{k+1})$ 即可，式中，系数矩阵 \mathbf{B}_i 包含 $(n-1) \times (n-1)$ 个矩阵块，对于第 j ($j=1, 2, \dots, n-1$) 列的矩阵块，如果 $j < i$ ，则除该列中第 j 行的矩阵块为一个负的单位矩阵(阶数等于第 j 个分区与第 i 个分区间联络线数的 4 倍)外，其它行的矩阵块均为零矩阵，如果 $j \geq i$ ，则除该列中第 j 行的矩阵块为一个单位矩阵(阶数等于第 i 个分区与第 $j+1$ 个分区间联络线数的 4 倍)外，其它行的矩阵块均为零矩阵。

$$(\mathbf{x}_i^{k+1}, \mathbf{x}_{bi}^{k+1}) = \arg \min_{(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{bi}) \in \mathbf{X}_i^f} \{ f_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{bi}) + \langle \boldsymbol{\lambda}_i^k, \mathbf{B}_i \mathbf{x}_{bi} \rangle + \frac{c}{2} \|(\mathbf{x}_{bi} + \mathbf{v}_i \Delta \delta_i^k) - (\mathbf{x}_{bi_0} + \mathbf{v}_i \Delta \delta_{i_0})\|^2 \} \quad (30)$$

$$\Delta \delta_i^{k+1} = \arg \min_{\Delta \delta_i} \{ \langle \boldsymbol{\lambda}_i^k, \mathbf{B}_i (\mathbf{v}_i \Delta \delta_i) \rangle + \frac{c}{2} \|(\mathbf{x}_{bi}^k + \mathbf{v}_i \Delta \delta_i) - (\mathbf{x}_{bi_0} + \mathbf{v}_i \Delta \delta_{i_0})\|^2 \} \quad (31)$$

$$\nabla f_{dij}(\boldsymbol{\lambda}_{ij}^k) = (\mathbf{x}_{bij}^{k+1} + \mathbf{v} \Delta \delta_{ij}^{k+1}) - (\mathbf{x}_{bj}^{k+1} + \mathbf{v} \Delta \delta_j^{k+1}) \quad (32)$$

分解协调无功优化的求解步骤为：

- 1) 根据电网分区原则将电网分解为 n 个分区；
- 2) 各分区读取数据并初始化计算参数，同时令 $k=0$ ；
- 3) 各分区利用各自的优化算法根据式(30)、(31)计算 \mathbf{x}_i^{k+1} 、 \mathbf{x}_{bi}^{k+1} 和 $\Delta \delta_i^{k+1}$ ；
- 4) 所有分区计算完成后，相邻分区交换边界节点数据 $\mathbf{x}_{bij}^{k+1} + \mathbf{v} \Delta \delta_{ij}^{k+1}$ 与 $\mathbf{x}_{bj}^{k+1} + \mathbf{v} \Delta \delta_j^{k+1}$ ，然后各分区利用各自的优化算法根据式(21)–(26)计算 $\boldsymbol{\lambda}_i^{k+1}$ ；
- 5) 判断所有相邻分区的 $\|\mathbf{x}_{bij}^{k+1} + \mathbf{v} \Delta \delta_{ij}^{k+1} - \mathbf{x}_{bj}^{k+1} - \mathbf{v} \Delta \delta_j^{k+1}\|$ 是否小于收敛阈值，如果是则停止迭代，否则令 $k=k+1$ ，转至步骤 3)。

该算法的通信协调模式与基于 APP 的分解协调算法完全相同，都只需要在相邻分区之间交换经 Δ -变量修正后的边界节点信息。对于联络线总数为 N 的网络，电网分解后每条联络线对应需建立 4 个(注入有功、注入无功、电压幅值和电压相角)等式约束，新增的等式约束总数为 $N \times 4$ ，每个等式约束中包含 2 个变量。由于每次迭代过程中只需要在相邻分区之间通信交换每个等式约束中的 2 个变量，因此每次迭代过程的通信量为 $N \times 4 \times 2$ 个浮点型数字。

4 算例分析

4.1 IEEE 118 节点系统仿真计算

本文选择 IEEE 118 节点系统^[22]4 种不同的分区情况和 IEEE 300 节点系统^[22]作为仿真模型，分别采用基于 APP 的分解协调算法和本文算法在不考虑通信时间的情况下进行仿真计算。计算中，收敛阈值都选为 0.01 pu；所有优化计算均采用粒子群优化算法；APP 算法中用到的参数根据文献[13]选取： $c = \alpha = 0.65$, $b = 2c = 1.3$ 。本文采用 Microsoft Visual Studio 2005 编程，通过多线程技术实现各分区并行计算，程序在一台 Xeon E5420/2.50GHz/4GB 计算机上运行。

IEEE 118 节点系统 4 种不同的分区情况和信息分别如图 1 和表 1 所示。

优化计算中，所有发电机节点的无功出力限值取对应给定的值；所有负荷节点的电压限值取为 0.9~1.1 pu；容性无功补偿节点 5 和 37 的补偿电纳在 -0.4~0 pu 范围内调节，步长取 0.05 pu；所有感性无功补偿节点的补偿电纳在 0~0.3 pu 范围内调节，步长取 0.02 pu；所有变压器变比在 0.9~1.1 pu 范围内调节，步长取 0.02 pu；所有发电机节点的电

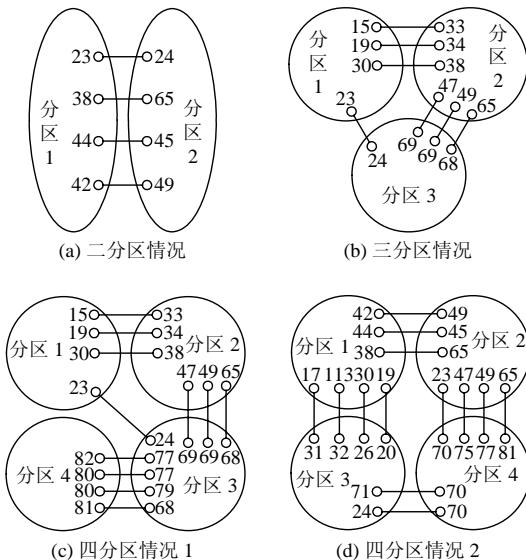


图 1 4 种不同的分区情况

Fig. 1 4 different division situations

表 1 各种分区情况的信息

Tab. 1 The information of the division situations

系统情况	分区数/个	联络线数/条	各子分区节点数/个	总节点数/个
二分区	2	4	51,75	126
三分区	3	7	39,41,52	132
四分区 1	4	11	39,41,23,37	140
四分区 2	4	13	41,33,23,47	144

压在当前值 ± 0.04 pu 范围内调节。将初始的离散控制变量都按离原始给定值最近的离散点取值，系统初始的有功损耗为 1.3234 pu。

对未分区的完整网络进行无功优化计算，可求得优化网损为 1.2368 pu，计算时间为 212 s。分别采用基于 APP 的分解协调算法和本文算法对各种分区情况进行无功优化计算，结果如表 2 所示。通过表 2 可以看出：

表 2 两种算法的计算结果对比

Tab. 2 Contrast of calculation results of the two algorithms

系统情况	优化网损/pu		迭代次数/次		计算时间/s		提高效率/%	
	APP	本文	APP	本文	APP	本文	APP	本文
二分区	1.2377	1.2377	11	6	175	97	17.5	54.2
三分区	1.2368	1.2368	18	9	146	75	31.1	64.6
四分区 1	1.2368	1.2368	29	14	119	58	43.9	72.6
四分区 2	1.2384	1.2398	32	15	144	69	32.1	67.5

1) 两种算法的优化网损与不分区完整网络的结果近似一致，说明它们都是正确有效的；

2) 由于分区后各分区网络规模减小并且是并行计算，两种算法都大大减少了计算时间，提高了计算效率；

3) 对于各种分区情况，迭代次数会因边界节点个数的增多而增多，而每次迭代所需时间会因最大分区网络规模的减小而减少，因此两种算法的计算效率与分区情况有关；

4) 对于每一种分区情况，本文算法的迭代次数都比基于 APP 的分解协调算法要少很多，从而提高的计算效率要比后者高很多，这主要是因为二者更新拉格朗日乘子的方式不同，前者用的是最优梯度，而后者用的是对偶梯度。

4.2 IEEE 300 节点系统仿真计算

文献[22]提供的 IEEE 300 节点系统数据包含有分区信息。所划分的 4 个分区(2 个高中压输电网络，1 个中压输电网络和 1 个中低压辐射状配电网)通过 11 条联络线连接，分区情况类似于我国目前的电力系统分层分区控制情况。电网分解后各子分区的节点个数分别为 133、83、70 和 36。

系统初始的网损为 4.1121 pu。优化计算中，除所有无功补偿电纳以 0.5 pu 为步长在 -3~3 pu 范围内调节外，其余参数都按 4.1 节中的方法取值。对原始完整网络优化计算，计算时间为 5136 s，优化网损为 3.7653 pu。表 3 给出了两种分解算法的优化

表3 IEEE 300节点系统的计算结果对比

Tab. 3 Calculation results of IEEE 300-node system

系统情况	优化网损/pu		迭代次数/次		计算时间/s		提高效率/%	
	APP	本文	APP	本文	APP	本文	APP	本文
IEEE 300 节点系统	3.779	3.779	25	14	3 501	1 973	31.83	61.58

计算结果。可以看出,对于类似于我国目前电力系统分层分区控制情况的 IEEE 300 节点系统分区仿真模型,两种分解算法的优化解与原始完整网络的结果差别很小,并且本文算法的计算效率比 APP 算法高很多,更适用于我国分层分区控制中心间的协调无功优化控制。

在迭代次数方面,虽然理论上本文算法比基于 APP 的分解协调算法有数量级上的改进,但是表 2 和 3 的结果中前者比后者只减少了 50% 左右,这与仿真中所有优化均采用粒子群算法有关。本文算法在每次迭代中都含有多个优化计算的步骤,而所有智能优化算法受种群初始化和算法自身寻优能力影响都存在优化结果可能是次优解的不足,这造成了本文仿真结果中实际本文算法比 APP 算法提高的计算效率比理论值少、分解协调优化结果与完整网络优化结果不完全一致。因此,在每次迭代需要优化计算的步骤中采用更高效先进的优化算法还可能会进一步提高本文算法的效率。分解协调内点法^[11]是目前计算速度最快的分解协调优化算法,主要是因为它在每次迭代中都没有优化计算的步骤,从而单次迭代计算速度很快。与分解协调内点法相比,无论在每次迭代需要优化计算的步骤中采用现有任何一种优化算法,本文算法的总体计算速度都不会比前者快,但数据通信量更小并且各分区可自主选择优化算法。

5 结论

本文提出了全分邻近中心算法,可实现全网无功优化的分解协调计算,具有以下特点:

- 1) 可以大大减少全网无功优化的计算时间,提高计算效率;
- 2) 仅需要在相邻分区之间交换边界节点信息,通信数据量小,解决了数据传输瓶颈问题;
- 3) 各分区不需要其它分区的内部模型和数据,并且可自主选择优化算法;
- 4) 所提算法的通信协调模式与基于 APP 的无功优化分解协调算法完全相同,但前者可以直接确定计算所用参数的取值,并且收敛速度更快、计算

效率更高。

致谢

在此,向在本文研究过程中提供帮助的罗马尼亚布加勒斯特理工大学 Ion Necoara 教授表示衷心的感谢。

参考文献

- [1] Mansour M O, Abdel-Rahman T M. Non-linear var power optimization using decomposition and coordination[J]. IEEE Trans. on Power Apparatus and Systems, 1984, 103(2): 246-255.
- [2] Deeb N, Shahidehpour S M. Linear reactive power optimization in a large power network using the decomposition approach[J]. IEEE Trans. on Power Systems, 1990, 5(2): 428-438.
- [3] 王建学,王锡凡,陈皓勇,等. 基于协同进化法的电力系统无功优化[J]. 中国电机工程学报, 2004, 24(9): 124-129.
Wang Jianxue, Wang Xifan, Cheng Haoyong, et al. Reactive power optimization based on cooperative co-evolutionary approach[J]. Proceedings of the CSEE, 2004, 24(9): 124-129(in Chinese).
- [4] 赵波,郭创新,张鹏翔,等. 基于分布式协同粒子群优化算法的电力系统无功优化[J]. 中国电机工程学报, 2005, 25(21): 1-7.
Zhao Bo, Guo Chuangxin, Zhang Pengxiang, et al. Distributed cooperative particle swarm optimization algorithm for reactive power optimization[J]. Proceedings of the CSEE, 2005, 25(21): 1-7(in Chinese).
- [5] Liang CH, Chung CY, Wong KP, et al. Parallel optimal reactive power flow based on cooperative co-evolutionary differential evolution and power system decomposition[J]. IEEE Trans. on Power Systems, 2007, 22(1): 249-257.
- [6] 李英,江全元, Jiang L, 等. 基于并行协同粒子群优化算法和 PC 集群的无功优化[J]. 电力系统自动化, 2009, 34(19): 42-47, 80.
Li Ying, Jiang Quanyuan, Jiang L, et al. Optimal reactive power dispatch based on a parallel cooperative particle swarm optimization algorithm and PC-cluster[J]. Automation of Electric Power Systems, 2009, 34(19): 42-47, 80(in Chinese).
- [7] 赵维兴,刘明波,孙斌,等. 基于诺顿等值的多区域系统无功优化分解协调算法[J]. 电网技术, 2009, 33(11): 44-48, 54.
Zhao Weixing, Liu Mingbo, Sun Bin, et al. A Norton equivalence based decomposition and coordination algorithm of reactive power optimization for multi-regional power grid[J]. Power System Technology,

- 2009, 33(11): 44-48, 54(in Chinese).
- [8] 刘志文, 刘明波. 基于 Ward 等值的多区域无功优化分解协调算法[J]. 电力系统自动化, 2010, 34(14): 63-69.
Liu Zhiwen, Liu Mingbo. A decomposition and coordination algorithm for multi-area reactive power optimization based on Ward equivalent[J]. Automation of Electric Power Systems, 2010, 34(14): 63-69(in Chinese).
- [9] 赵维兴, 刘明波, 缪楠林, 等. 基于对角加边模型的多区域无功优化分解算法[J]. 电力系统自动化, 2008, 32(4): 25-29, 40.
Zhao Weixing, Liu Mingbo, Miao Nanlin, et al. A decomposition algorithm for multi-area reactive-power optimization based on the block bordered diagonal model[J]. Automation of Electric Power Systems, 2008, 32(4): 25-29, 40(in Chinese).
- [10] 赵维兴, 刘明波. 基于近似牛顿方向的多区域无功优化解耦算法[J]. 中国电机工程学报, 2007, 27(25): 18-24.
Zhao Weixing, Liu Mingbo. A decomposition algorithm applied to multi-area reactive-power optimization based on approximate Newton directions[J]. Proceedings of the CSEE, 2007, 27(25): 18-24(in Chinese).
- [11] Yan Wei, Wen Lili, Li W, et al. Decomposition coordination interior point method and its application to multi-area optimal reactive power flow[J]. Electrical Power and Energy Systems, 2011, 33: 55-60.
- [12] 程新功, 厉吉文, 曹立霞, 等. 基于电网分区的多目标分布式并行无功优化研究[J]. 中国电机工程学报, 2003, 23(10): 110-113.
Cheng Xingong, Li Jiwen, Cao Lixia, et al. Multi-objective distributed parallel reactive power optimization based on subarea division of the power systems[J]. Proceedings of the CSEE, 2003, 23(10): 110-113(in Chinese).
- [13] 刘宝英, 杨仁刚. 采用辅助问题原理的多分区并行无功优化算法[J]. 中国电机工程学报, 2009, 29(7): 47-51.
Liu Baoying, Yang Rengang. Multi-subarea parallel reactive power optimization based on APP[J]. Proceedings of the CSEE, 2009, 29(7): 47-51(in Chinese).
- [14] Hur D, Park J K, Kim B H, et al. Evaluation of convergence rate in the auxiliary problem principle for distributed optimal power flow[J]. IEE Proceedings of Generation, Transmission and Distribution, 2002, 149(5): 525-532.
- [15] Bakirtzis A G, Biskas PN. Decentralised DC load flow and applications to transmission management[J]. IEE Proceedings of Generation, Transmission and Distribution, 2002, 149(5): 600-606.
- [16] 程新功, 厉吉文, 曹立霞, 等. 电力系统最优潮流的分布式并行算法[J]. 电力系统自动化, 2003, 27(24): 23-27.
Cheng Xingong, Li Jiwen, Cao Lixia, et al. Distributed and parallel optimal power flow solution of electric power systems[J]. Automation of Electric Power Systems, 2003, 27(24): 23-27(in Chinese).
- [17] Balho H K, Ross B. Coarse-grained distributed optimal power flow[J]. IEEE Trans. on Power Systems, 1997, 12(2): 932-939.
- [18] Necoara I, Suykens A K. Application of a smoothing technique to decomposition in convex optimization[J]. IEEE Trans. on Automatic Control, 2008, 53(11): 2674-2679.
- [19] Necoara I, Doan D, Suykens A K, et al. Application of the proximal center decomposition method to distributed model predictive control[C]/Proceedings of the 47th IEEE Conference on Decision and Control. Cancun, Mexico: IEEE, 2008: 2900-2905.
- [20] Nesterov Y. Smooth minimization of non-smooth functions[J]. Mathematical Programming, 2005, 103(1): 127-152.
- [21] Tsiaflakis P, Necoara I, Suykens A K, et al. Improved dual decomposition based optimization for DSL dynamic spectrum management[J]. IEEE Trans. on Signal Processing, 2010, 58(4): 2230-2245.
- [22] PACS-L. Power systems test case archive[EB/OL]. Washington: University of Washington. [2011-10-30]. <http://www.ee.washington.edu/research/pstca/>.



收稿日期: 2012-07-25。

作者简介:

李智(1987), 男, 博士研究生, 研究方向为电力系统电压无功优化及协调控制,
lizhi5saisen@126.com;

李智

杨洪耕(1949), 男, 教授, 博士生导师, 从事电能质量、无功电压控制、智能电网等方面的教学和科研工作。

(责任编辑 张玉荣)