

# 生物防治害虫的离散种群模型的稳定性分析

闫旭<sup>1</sup> 李冬梅<sup>1</sup> 张鸿艳<sup>2</sup>

(1 哈尔滨理工大学应用科学学院, 哈尔滨 150080; 2 黑龙江科技学院树力系, 哈尔滨 150027)

**摘要** 针对一类生物防治害虫的离散种群模型, 利用差分方程理论, 得到了模型解的有界性、边界平衡点的稳定性、正平衡点的存在唯一性和稳定性等的充分条件。

**关键词** 生物防治; 离散模型; 稳定性

中图分类号 K 826.3 文献标志码 B

## Biological Control of Pests Stability Analysis of Discrete Population Models

Yan Xu Li Dongmei Zhang Hongyan

**Abstract** In this paper, a class of biological control of pests of discrete population models, the use of differential equation theory of population dynamics line, gives the boundedness of solutions of the model, the stability boundary equilibrium points, existence and uniqueness of positive equilibrium and stability sufficient condition.

**Keywords** biological control; discrete model; stability

生物学家对阿尔卑斯山脉的落叶松林区进行考察时, 发现有一种栖息在落叶松上的一种鳞翅目的蛾, 对落叶松有极强的破坏力, 能使得落叶松在短时间内枯萎。这个种群的密度每 8~9 年反复 1 次, 而且在每个周期中种群数量的最大值与最小值的比能达到  $10 \times 10^5$ 。当种群密度不断增加时, 就会有大量的落叶松被啃食, 从而导致死亡。因此, 人们为了防止这种情况的频繁出现, 想出了许多种控制落叶松食芽蛾种群密度的方法, 其中利用寄生蜂进行生物防治的方法, 深受生物学家的喜欢<sup>[1]</sup>。

Turchin 采用寄生干扰的功能性反应代替线性功能性反应, 得到了如下模型<sup>[2]</sup>:

$$\begin{cases} N_{t+1} = N_t \cdot \exp[r_0(1 - \frac{N_t}{K}) - \frac{aP_t}{1+awP_t}] \\ P_{t+1} = c \cdot N_t(1 - \exp[\frac{aP_t}{1+awP_t}]) \end{cases} \quad (1)$$

其中:  $t$  为种群的世代数,  $N_t$  为宿主的第  $t$  代种群密度,  $P_t$  为寄生生物的第  $t$  代种群密度;  $\lambda$  为宿主的繁殖力;  $a$  为寄生生物的搜寻效率常数;  $r_0$  为宿主的内禀增长率;  $K$  为宿主的环境容纳量;  $c$  为被寄生在单个宿主处存活的寄生卵的平均数;  $w$  表示寄生生物用于适应宿主所需的时间。文献<sup>[2]</sup>仅提出方程设想, 未对系统动力学行为进行详尽分析。之后还有生物数学家对此模型进行研究, 但都是进行了简单的数值模拟, 并不能全面的说明模型的特性<sup>[3]</sup>。

笔者将利用差分方程的相关知识系统地研究模型(1)的动力

学行为, 应用文献<sup>[4-5]</sup>中的引理及相关定理讨论了解的有界性、边界平衡点的稳定性、正平衡点的存在唯一性和稳定性。

### 1 主要结果

#### 1.1 解的有界性

1.1.1 定理 1 模型(1)解是有界的。即  $t \in N^+$ ,

有  $N_t < \max\left\{N_0, \frac{K}{r_0} \exp(r_0 - 1)\right\} = N_{\max}$ ,  $P_t < \max\{P_0, cN_{\max}\} = P_{\max}$ 。

证明 因为  $a, w$  都为正实数, 则  $\exp(\frac{aP_t}{1+awP_t}) < 1$ 。

从而  $N_{t+1} = N_t \exp[r_0(1 - \frac{N_t}{K}) - \frac{aP_t}{1+awP_t}] < N_t \exp[r_0(1 - \frac{N_t}{K})]$

令  $H(N) = N \exp[r_0(1 - \frac{N}{K})]$ ,  $H'(N) = (1 - \frac{r_0}{K}N) \exp[r_0(1 - \frac{N}{K})] = 0$ ,

得  $N = \frac{K}{r_0}$ 。

当  $N > \frac{K}{r_0}$  时,  $H'(N) < 0$ ; 当  $N < \frac{K}{r_0}$  时,  $H'(N) > 0$ 。

由极值的充分条件可知, 当  $N < \frac{K}{r_0}$  时,

$$H(N)_{\max} = \frac{K}{r_0} \exp(r_0 - 1)$$

再由比较原理有  $N_{t+1} < N_t \exp[r_0(1 - \frac{N_t}{K})] \leq \frac{K}{r_0} \exp(r_0 - 1)$   
故  $\forall t \in N^+$ , 有

$$N_t < \max\left\{N_0, \frac{K}{r_0} \exp(r_0 - 1)\right\} = N_{\max} \quad (2)$$

再由(2)式得  $P_{t+1} = cN_t[1 - \exp(\frac{aP_t}{1+awP_t})] < cN_t < cN_{\max}$

作者简介: 闫旭 (1984-), 从事常微分方程理论及应用研究。

收稿日期: 2011-12-11

故 $\forall t \in N^+$ , 有 $P_t < \max\{P_0, cN_{\max}\} = P_{\max}$ .  
证毕。

由定理1可知,

$$D^* = \{(N, P) \mid 0 < N < \frac{K}{r_0} \exp(r_0 - 1), 0 < P < \frac{cK}{r_0} \exp(r_0 - 1)\}$$

是模型(1)的正向不变集。

1.2 非负平衡点稳定性分析 在区域 $D^*$ 上模型(1)可变形为

$$\begin{cases} N_{t+1} = N_t \cdot \exp[F(N_t, P_t)] \\ P_{t+1} = c \cdot N_t \{1 - \exp[G(N_t, P_t)]\} \end{cases} \quad (3)$$

其中 $F(N_t, P_t) = r_0(1 - \frac{N_t}{K}) - \frac{aP_t}{1 + cwP_t}$   $G(N_t, P_t) = -\frac{aP_t}{1 + cwP_t}$

模型(3)平衡点满足下列方程

$$\begin{cases} N(1 - \exp[F(N, P)]) = 0 \\ P - c \cdot N \{1 - \exp[G(N, P)]\} = 0 \end{cases} \quad (4)$$

显然模型(3)存在1个灭绝平衡点 $E_0(0, 0)$ 和1个边界平衡点 $E_1(K, 0)$ 。

模型(3)的Jacobi矩阵为

$$J(N, P) = \begin{pmatrix} \exp[F(N, P)] + N \exp[F(N, P)] F_N(N, P) & N \exp[F(N, P)] F_P(N, P) \\ c \{1 - \exp[G(N, P)]\} - c N \exp[G(N, P)] G_N(N, P) & -c N \exp[G(N, P)] G_P(N, P) \end{pmatrix} \quad (5)$$

$$\text{其中 } F_N(N, P) = -\frac{r_0}{K} < 0 \quad F_P(N, P) = \frac{-a}{(1 + cwP)^2} < 0$$

$$G_N(N, P) = 0 \quad G_P(N, P) = \frac{-a}{(1 + cwP)^2} < 0$$

1.2.1 引理<sup>[5]</sup> 设 $A$ 是1个 $2 \times 2$ 阶常数矩阵,  $(x^*, y^*)$ 是局部渐近稳定的当且仅当 $2 > 1 + \text{Det}(A) > |\text{Tr}(A)|$ ; 若 $A$ 有1个特征根的模大于1, 则 $(x^*, y^*)$ 是不稳定的。

1.2.2 定理2  $E_0(0, 0)$ 是模型(3)不稳定的平衡点。当 $aK < 1$ ,  $0 < r_0 < 2$ 时,  $E_1(K, 0)$ 是模型(3)局部渐近稳定的平衡点; 当 $aK > 1$ 或 $r_0 > 2$ 时,  $E_1(K, 0)$ 是模型(3)不稳定平衡点。

证明: 在 $E_0(0, 0)$ 处, 模型(3) Jacobi矩阵为

$$J(E_0) = \begin{pmatrix} e^{r_0} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令 $\lambda_1, \lambda_2$ 为 $J(E_0)$ 的2个特征根, 则 $\lambda_1 = e^{r_0}, \lambda_2 = 0$ 。因为 $r_0 > 0$ , 所以 $\lambda_1 = e^{r_0} > 1, \lambda_2 = 0 < 1$ 。因由文献<sup>[8]</sup>知 $E_0(0, 0)$ 总是不稳定的。

在 $E_1(K, 0)$ 处, 模型(3)的Jacobi矩阵为

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} 1 - r_0 & -aK \\ 0 & aK \end{pmatrix}$$

$J(E_0)$ 的2个特征根分别是 $\lambda_1 = 1 - r_0, \lambda_2 = aK$ 。当 $aK < 1, 0 < r_0 < 2$ 时,  $J(E_1)$ 2个1个特征根的模小于1可知 $E_1(K, 0)$ 是局部渐近稳定的。

当 $aK > 1$ 或 $r_0 > 2$ 时,  $J(E_1)$ 至少有1个特征根的模大于1, 可 $E_1(K, 0)$ 是不稳定的。证毕。

1.3 正平衡点稳定性分析

1.3.1 定理3 当 $wr_0 > 1$ , 且 $\frac{r_0 \sqrt{wr_0}}{ka(wr_0 - \sqrt{wr_0})(1 - wr_0)} > c \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{wr_0}}{w}\right) \right\}$ 时, 模型(3)存在唯一的正平衡点 $E^*(N^*, P^*)$ 。

证明 由(4)式可求得正平衡点 $E^*(N^*, P^*)$ 满足

$$\begin{cases} \frac{P}{N} = \frac{\frac{r_0}{N}(1 - \frac{N}{K})}{a[1 - wr_0(1 - \frac{N}{K})]} \\ \frac{P}{N} = c(1 - \exp[r_0(1 - \frac{N}{K})]) \end{cases} \quad (6)$$

做辅助函数

$$f(N) = \frac{\frac{r_0}{N}(1 - \frac{N}{K})}{a[1 - wr_0(1 - \frac{N}{K})]} \quad (N \neq K \frac{wr_0 - 1}{wr_0})$$

$$g(N) = c \{1 - \exp[r_0(1 - \frac{N}{K})]\}$$

在 $[0, K]$ 内 $f(N)$ 有

$$f'(N) = \frac{-r_0 a [1 - wr_0(1 - \frac{N}{K})] - \frac{r_0 a N}{K} (1 - \frac{N}{K})}{a N^2 [1 - wr_0(1 - \frac{N}{K})]^2}$$

令 $f'(\xi) = 0$ , 求得 $\xi_{1,2} = K \frac{wr_0 \pm \sqrt{wr_0}}{wr_0}$ , 而

$$\xi_1 = K \frac{wr_0 - \sqrt{wr_0}}{wr_0} < K \quad \xi_2 = K \frac{wr_0 + \sqrt{wr_0}}{wr_0} > K$$

当 $wr_0 > 1$ 时, 有  $f'(N) \begin{cases} > 0, & 0 < N < K \frac{wr_0 - \sqrt{wr_0}}{wr_0} \\ < 0, & K \frac{wr_0 - \sqrt{wr_0}}{wr_0} < N < K \end{cases}$

$\lim_{N \rightarrow 0^+} f(N) = -\infty, \lim_{N \rightarrow \xi_1} f(N) = f(\xi_1) > 0, f(K) = 0$ 。可知 $f(N)$ 在 $N = \xi_1$ 取得最大值。

在 $[0, K]$ 内 $g(N)$ 有 $g(0) = c(1 - e^{r_0}) < 0; g(K) = 0; g'(N) > 0, N > 0$ 则 $g(N)$ 在 $[0, K]$ 上单增的。

$$\text{若 } \frac{r_0 \sqrt{wr_0}}{ka(wr_0 - \sqrt{wr_0})(1 - wr_0)} > c \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{wr_0}}{w}\right) \right\}$$

即 $f(\xi_1) > g(\xi_1)$ , 则模型(3)存在唯一正平衡点 $E^*(N^*, P^*)$ 见图1。

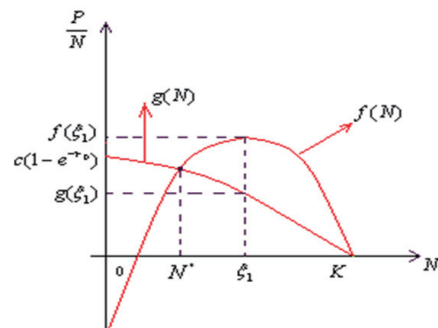


图1 模型(1)正平衡点唯一存在示意图

综上所述, 当  $wr_0 > 1$ ,

且当  $\frac{r_0\sqrt{wr_0}}{ka(wr_0 - \sqrt{wr_0})(1 - wr_0)} > c \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\sqrt{wr_0}}{w}\right) \right\}$  时,

根据  $f[N], g[N]$  性质及图1可知模型(3)存在唯一正平衡点  $E^*(N^*, P^*)$ 。证毕。

由(5)式及(6)式可以得出模型(3)在  $E^*(N^*, P^*)$  处 *Jacobi* 矩阵为

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} 1 + N^*F_N & N^*F_P \\ \frac{P^*}{N^*} - (cN^* - P^*)G_N & (P^* - cN^*)G_P \end{pmatrix} \quad (7)$$

可计算出

$$Det(J(E^*)) = (1 + N^*F_N)(P^* - cN^*)G_P - N^*F_P \left[ \frac{P^*}{N^*} + (P^* - cN^*)G_N \right]$$

$$Tr(J(E^*)) = (P^* - cN^*)G_P + N^*F_N + 1$$

1.3.2 定理4 若  $(P^* - cN^*)(F_N - G_N)G_P < \frac{1}{N^*} + cG_P$

且模型(1)满足下列条件之一, 则  $E^*(N^*, P^*)$  是模型(1)局部渐近稳定点。

$$I. (P^* - cN^*)G_P + N^*F_N + 1 \geq 0, (P^* - cN^*)(F_N - G_N)G_P > F_N + \frac{P^*}{N^*}F_P$$

$$II. (P^* - cN^*)G_P + N^*F_N + 1 < 0$$

$$N^*P^*F_P - N^*F_N - 2 < (2 + N^*F_N + N^*G_N)(P^* - cN^*)G_P$$

若  $\frac{P^*}{N^*} \neq (cN^* - P^*)G_N$ , 当  $1 + N^*F_N > 1$  或  $G_P[(P^* - cN^*)(1 - N^*G_N) - P^*] > 1$  时,

$E^*(N^*, P^*)$  是模型(1)不稳定点。

证明: 若  $(P^* - cN^*)(F_N - G_N)G_P < \frac{1}{N^*} + cG_P$  成立。

情形: 当  $(P^* - cN^*)G_P + N^*F_N + 1 \geq 0$ ,  $(P^* - cN^*)(F_N - G_N)G_P > F_N + \frac{P^*}{N^*}F_P$ , 有  $Tr(J(E^*)) \geq 0$ ,  $Tr(J(E^*)) < Det(J(E^*)) + 1$  时;

当  $(P^* - cN^*)(F_N - G_N)G_P < \frac{1}{N^*} + cG_P$  时, 有  $Det(J(E^*)) < 1$ 。

由引理知, 故  $E^*(N^*, P^*)$  是模型(1)局部渐近稳定的。

情形: 当  $(P^* - cN^*)G_P + N^*F_N + 1 < 0$ ,

$$N^*P^*F_P - N^*F_N - 2 < (2 + N^*F_N + N^*G_N)(P^* - cN^*)G_P$$

有  $Tr(J(E^*)) < 0$ ,  $Tr(J(E^*)) < Det(J(E^*)) + 1$ ;

当  $(P^* - cN^*)(F_N - G_N)G_P < \frac{1}{N^*} + cG_P$  时, 有  $Det(J(E^*)) < 1$ 。

由引理知,  $E^*(N^*, P^*)$  是模型(1)局部渐近稳定的。

当  $\frac{P^*}{N^*} \neq (cN^* - P^*)G_N$  时, 由(7)式有

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} 1 + N^*F_N & N^*F_P \\ 0 & G_P[(P^* - cN^*)(1 - N^*G_N) - P^*] \end{pmatrix}$$

当  $1 + N^*F_N > 1$  或  $G_P[(P^* - cN^*)(1 - N^*G_N) - P^*] > 1$  时,  $J(E^*)$  至少有1个特征根的模大于1, 从而  $E^*(N^*, P^*)$  是模型(1)不稳定点。证毕。

## 参考文献

- [1] Peter. Complex population Dynamics: A Theoretical/Empirical Synthesis. Princeton and Oxford: Princeton university Press, 2003: 109-112, 213-235.
- [2] Edelstein-Keshet L, Rausher M.D. The effects of inducible plant density on herbivore population. I. Mobile herbivores in continuous time. American Naturalist, 1989 (133): 787-810.
- [3] Turchin P. Complex population Dynamics. Princeton: Princeton university press, 2003: 221-227.
- [4] 陈兰荪, 陈键. 非线性生物动力系统. 北京: 科学出版社, 1993: 53-59.
- [5] Edelstein-Keshet L. Mathematical Models in Biology. New York: Random House Inc., 1988: 55-59.